JINBANG BOOKS · SINCE 1997
金榜图书
北京时代巨流文化有限公司

全国各大考研辅导机构通用教材

2019 李永乐·王式安 考研数学系列

线性代数 辅导讲义

主编 ◎ 李永乐

★本书特点★ 名师教学内容集结，多年经验积累，体系结构不断丰富完善

哪里不会 精选考点视频讲解 下载V研客APP
扫哪里 APP扫书中二维码 获取方式详见封二使用说明

★ 讲义，纸质的课程，追求化繁为简
承载着每一位学生的美好期望 ★

超值加赠

双色印刷 高品质阅读体验

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

清华大学
李永乐
考研数学金牌书系

＋

中国人民大学
徐之明
考研政治金牌书系

＝

金榜题名

基础十强必备件套

1 超级红宝书　2 逻辑图解　3 超级900题　4 真题心解

专业权威 · 血统纯正
由人大教授、北大教授、原命题专家和阅卷组成员联合编写。

口碑相传 · 出版最久
被历届考生誉为“考研政治教材的旗舰版”。

化繁为简 · 别出心裁
以逻辑图的形式整体呈现各知识点。

阶段复习 · 各有所用
在考生复习的各个阶段均可使用，可起到不同的效果。

精雕细刻 · 题量适中
九百道题，专业精炼、全真模拟真题风格。

知难而进 · 只为名校
以能力题为主，难度较大。适合于报考名校、政治需70分以上的考生。

还原考场 · 实战演练
为业内唯一一套完全还原考场的真题卷。

知其然 · 知其所以然
汇集起权威学者，对真题背后的权威信息进行权威解读。

冲刺四件套

5 形势与政策　6 精华背诵　7 分析题一本通　8 压轴4套卷

- 时政专题
  篇篇精彩紧扣考情
- 模拟试题
  重点热点一网打尽
- 披沙拣金
  凸显核心知识
- 删繁就简
  便利轻松学习
- 授人以鱼
  直击必背知识
- 授人以渔
  揭示命题角度
- 全真模拟
  实战演练无缝对接考场
- 屡创佳绩
  连续多年命中大题原题

政治到底应该怎么复习？

扫一扫，就知道！

拿高分上名校，
必须使用双一流教材！

金榜图书

全国各大考研辅导机构通用教材

2019 李永乐·王式安 考研数学系列

线性代数 辅导讲义

主编◎李永乐

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是为准备考研的学生复习线性代数而编写的一本辅导讲义，由编者近年来的辅导班笔记改写而成。本书也可作为大一新生学习线性代数时的参考书。

全书共分六章及一个附录，每章均由知识结构网络图、基本内容与重要结论、典型例题分析选讲以及练习题精选四部分组成。为的是方便同学们总结归纳以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导讲义/李永乐主编. —西安：西安交通大学出版社，2010.2
ISBN 978-7-5605-3454-1

Ⅰ.①线… Ⅱ.①李… Ⅲ.①线性代数—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 020946 号

书　　名　线性代数辅导讲义
主　　编　李永乐
责任编辑　张梁　雷萧屹

出版发行　西安交通大学出版社
　　西安市兴庆南路 10 号(邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
　　(029)82668315(总编办)
印　　刷　三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张　12　字数　275 千字
版次印次　2010 年 2 月第 1 版　2018 年 1 月第 9 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-3454-1
定　　价　49.80 元

读者购书、书店添货，如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
版权所有　侵权必究

金榜图书官方天猫店
店名：时代巨流图书专营店
(http://sdjlts.tmall.com)

金榜图书官方微店

西安交通大学出版社
天猫官方店

西安交通大学出版社
官方微店

前　言

本书是为准备考研的学生复习线性代数而编写的一本辅导讲义，由编者近年来的辅导班笔记改写而成。本书也可作为大一新生学习线性代数时的参考书。

此次修订，补充、更换、编写了一些新题，同时，针对同学们不太好理解或不大注意的地方，也相应增加了一些新的说明。

全书共分六章及一个附录，每章均由**知识结构网络图、基本内容与重要结论、典型例题分析选讲以及练习题精选四部分组成**。为的是方便同学们总结归纳以及更好地掌握知识间的相互渗透与转换。

本书力求在较短的时间内，用不多的篇幅，帮助同学们搞清基本概念，掌握基本理论和公式，了解重点和难点并澄清一些常犯的错误与疑惑。一方面，通过对**典型例题**的分析讲评，帮助同学们梳理解题的思路，熟悉常用的方法和技巧；另一方面，精编适量的**练习题**，帮助同学们更好地理解和掌握基本内容、基本解题方法，达到巩固、悟新与提高的目的。另外，题后的点评与评注，其目的在于帮助同学们弄清重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题。

在考研数学中，线性代数占 5 个考题(2 个选择，1 个填空，2 个解答)，分值为 34 分，其平均用时应当为 40 分钟左右。因而我们在附录中设计了 45 分钟的水平测试，希望同学们在复习完本书之后，用两套自测题及时地进行查漏补缺。线性代数考试大纲对于数学一、二、三来说基本上一样，近年来考题也是趋同，本书中除向量空间仅数一考生要准备外，其余部分大家都应复习。

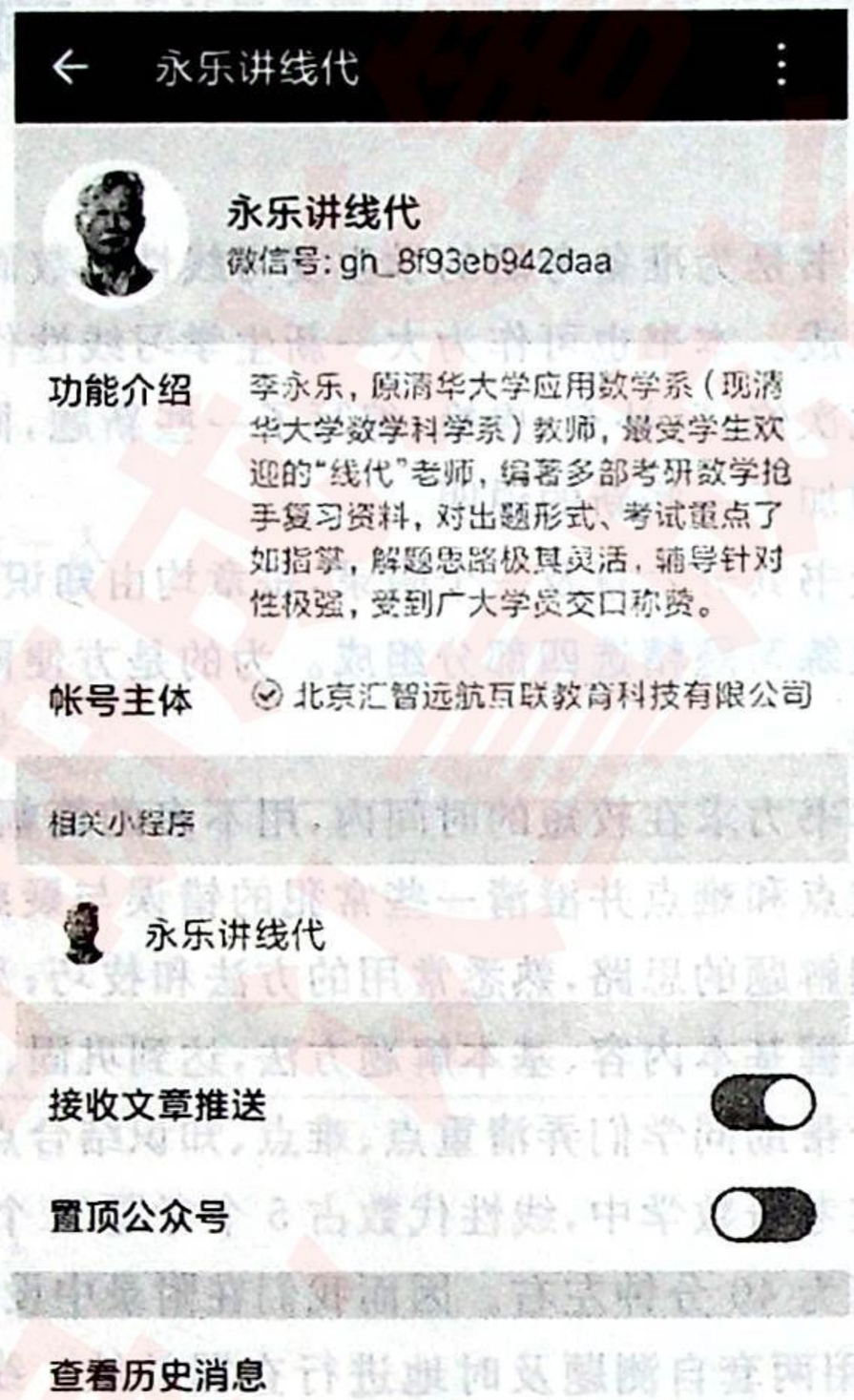
另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com@清华李永乐考研数学辅导团队。

微博　　微信公众号

总之，经过修订再版，希望本书能对同学们的复习备考有更大的帮助。由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，欢迎批评指正。

编　者

2018 年 1 月



小课堂

永乐讲线代

微信扫一扫　跟李老师学线代

目 录

第一章 行列式

一、知识结构网络图 …… (1)
二、基本内容与重要结论 …… (3)
基础知识 …… (3)
重要定理 …… (4)
主要公式 …… (5)
方阵的行列式 …… (6)
克拉默法则 …… (7)
三、典型例题分析选讲 …… (8)
数字型行列式 …… (8)
抽象行列式 …… (15)
特征多项式 …… (18)
矩阵秩的概念 …… (19)
关于$|A|=0$ …… (20)
克拉默法则 …… (21)
四、练习题精选 …… (23)
答案与提示 …… (25)

第二章 矩阵

一、知识结构网络图 …… (27)
二、基本内容与重要结论 …… (29)
基础知识 …… (29)
重要定理 …… (32)
主要公式 …… (33)
三、典型例题分析选讲 …… (36)
矩阵运算 …… (36)
伴随矩阵 …… (40)
可逆矩阵 …… (42)
初等矩阵 …… (46)
正交矩阵 …… (50)
矩阵方程 …… (51)
四、练习题精选 …… (53)
答案与提示 …… (54)

第三章 n 维向量

一、知识结构网络图 …… (56)
二、基本内容与重要结论 …… (58)
基础知识 …… (58)
重要定理 …… (60)
三、典型例题分析选讲 …… (64)
线性相关 …… (64)
线性表出 …… (71)
向量组的秩 …… (78)
矩阵的秩 …… (81)
Schmidt 正交化 …… (84)
向量空间 …… (85)
四、练习题精选 …… (89)
答案与提示 …… (90)

第四章 线性方程组

一、知识结构网络图 …… (93)
二、基本内容与重要结论 …… (95)
基础知识 …… (95)

主要定理 …… (96)
三、典型例题分析选讲 …… (98)
基础解系 …… (98)
解方程组 $Ax=b$ …… (103)
有解判定、解的结构、性质 …… (111)
公共解、同解 …… (114)
方程组的应用 …… (117)
四、练习题精选 …… (121)
答案与提示 …… (122)

第五章 特征值与特征向量

一、知识结构网络图 …… (124)
二、基本内容与重要结论 …… (126)
基础知识 …… (126)
重要定理 …… (126)
三、典型例题分析选讲 …… (129)
特征值、特征向量 …… (129)
相似、相似对角化 …… (136)
相似对角化时的可逆矩阵 P …… (140)
求参数的问题 …… (143)
用相似求 A^n …… (145)
反求矩阵 A …… (147)
实对称矩阵 …… (148)
四、练习题精选 …… (154)
答案与提示 …… (155)

第六章 二次型

一、知识结构网络图 …… (157)
二、基本内容与重要结论 …… (159)
基础知识 …… (159)
主要定理 …… (160)
三、典型例题分析选讲 …… (162)
二次型基本概念 …… (162)
二次型的标准形 …… (163)
二次型的正定性 …… (169)
矩阵的等价、相似、合同 …… (173)
四、练习题精选 …… (176)
答案与提示 …… (177)

附录 45 分钟水平测试

自测(一) …… (179)
自测(二) …… (180)
参考答案与提示 …… (181)

第一章　行列式——每章都有应用

一、知识结构网络图

- 行列式
  - 概念 — 不同行不同列元素乘积的代数和(共 $n!$ 项)
  - 性质
    - 经转置行列式的值不变,即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$
    - 某行有公因数 k,可把 k 提到行列式外. 特别地,某行元素全为 0,则行列式的值为 0.
    - 两行互换行列式变号. 特别地,两行相等,行列式值为 0;两行成比例,行列式值为 0.
    - 某行所有元素都是两个数的和,则可写成两个行列式之和.
    - 某行的 k 倍加至另一行,行列式的值不变.
  - 展开式 — 代数余子式
    - $|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$ (按 i 行展开)
    - $|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ (按 j 列展开)
  - 计算
    - 数字型 — 三角化法 / 公式法 / 递推法 $\xrightarrow[\text{技巧}]{\text{常用}}$
      - 直接按行(列)展开
      - 把第 1 行(列)的 k_i 倍加到第 i 行(列)
      - 把每行(列)都加到第 1 行(列)
      - 逐行(列)相加
    - 抽象型 —
      - 用行列式性质
      - 用矩阵性质
      - 用特征值　$|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$,相似
  - 证 $|\boldsymbol{A}|=0$ —
    - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 反证法
    - $r(\boldsymbol{A})<n$
    - 0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
    - $|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{A}|$
  - 应用 —
    - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解
    - 伴随矩阵求逆法
    - 线性相关(无关)判定
    - 可逆的证明
    - 克拉默法则
    - 特征值计算
    - 二次型正定判定

对于二、三阶行列式有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2$$

注意这样的计算方法对 4 阶及 4 阶以上行列式不适用.

学习札记：

【评注】 (1) 对行列式的性质 4 要理解正确. 例如

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}.$$

对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，有 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]$，由于行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 中每一行都是两个数的和，所以若用性质 4 把行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 拆开，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 应当是 2^n 个 n 阶行列式之和. 因此一般情况下 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

特别地，

$$\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & 0-a_{12} & 0-a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0-a_{21} & \lambda-a_{22} & 0-a_{23} \\ 0-a_{31} & 0-a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

(先将第一行拆分，其它行不变，依此拆分第二、三行)

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & -a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda & -a_{23} \\ -a_{31} & 0 & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda & 0 \\ -a_{31} & 0 & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda & -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} & 0 \\ 0 & -a_{32} & \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -a_{13} \\ 0 & \lambda & -a_{23} \\ 0 & 0 & -a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(2) 要会用行列式的性质及展开定理计算数字型行列式.

(3) 要熟悉抽象型行列式的计算.

今年考题

(2018,3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性无关的向量组，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ _____.

(2018,1) 设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量，且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ _____.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

定义 1.1　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (1.1)$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和. 式(1.1)称为 n 阶行列式的**完全展开式**.

例如，若已知 $a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项，那么根据行列式的定义，它应是不同行不同列元素的乘积. 因此必有 $j=3$.

由于 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 对应的逆序数

$$\tau(4312)=3+2+0=5$$

是奇数，所以该项所带符号为负号.

【评注】　(1) 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列. 通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

(2) 一个排列中，如果一个大的数排在小的数之前，就称这两个数构成一个**逆序**. **一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数**. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数，则称这个排列为**偶排列**，否则称为**奇排列**.

例如，在排列 25134 中，有逆序 21，51，53，54，因此排列 25134 的逆序数为 4，即 $\tau(25134)=4$. 所以排列 25134 是偶排列.

学习札记：

定义 1.2 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.2}$$

例如，若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=2$，即已知

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2,$$

从而 $a=3$.

重要定理

定理 1.1 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任意一行的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.3}$$

公式(1.3)称为行列式按第 k 行的展开公式.

定理 1.1′ n 阶行列式 D 等于它的任意一列的所有元素与它们各自对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{1k}A_{1k}+a_{2k}A_{2k}+\cdots+a_{nk}A_{nk} \quad (k=1,2,\cdots,n). \tag{1.4}$$

公式(1.4)称为行列式按第 k 列的展开公式.

学习札记：

定理 1.2　设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，当 $i\neq k$　$(i,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0; \tag{1.5}$$

当 $j\neq k$　$(j,k=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0. \tag{1.6}$$

【评注】　根据代数余子式的性质(1.3)与(1.5)，对于

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 和行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，我们有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23} & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23} & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23} & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & 0 \\ 0 & 0 & |\boldsymbol{A}| \end{bmatrix}=|\boldsymbol{A}|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

类似地由(1.4)与(1.6)有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

这是一个重要的公式，要会灵活运用(详见第二章伴随矩阵).

主要公式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.7}$$

学习札记：

(2) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.8}$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & * \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ * & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|, \tag{1.9}$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|, \tag{1.10}$$

m,n 分别是矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的阶数.

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i - x_j). \tag{1.11}$$

(5) 特征多项式

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |\boldsymbol{A}|, \tag{1.12}$$

其中 $s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

【评注】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维非零列向量，若

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0},$$

则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

由 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \Rightarrow \lambda\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{0} \Rightarrow (\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$

知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次方程组 $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的非零解，故系数行列式 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$.

关于(1.12)的推导请参看 P_2 之评注(1).

特别地，若秩 $r(\boldsymbol{A}) = 1$，由(1.12)知特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (\sum a_{ii})\lambda^2 = (\lambda - \sum a_{ii})\lambda^2.$$

那么，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1 = \sum a_{ii}, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

方阵的行列式

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}| = |\boldsymbol{A}|$； (1.13)

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$；　(1.14)

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；　(1.15)

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$；　(1.16)

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$；　(1.17)

(6) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$；　(1.18)

(7) 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.　(1.19)

学习札记：

克拉默法则

若 n 个方程 n 个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{1.20}$$

其中 $D_j = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} (j=1,2,\cdots,n)$.

推论 1　若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式不为 0，则方程组只有零解.

推论 2　若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

有非零解，则系数行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

数字型行列式

【例 1.1】 (2014, $\begin{smallmatrix}1\\2,3\end{smallmatrix}$) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ [ ]

(A) $(ad-bc)^2$.　　(B) $-(ad-bc)^2$.

(C) $a^2d^2-b^2c^2$.　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$.

【分析一】 本题有较多的0,可考虑直接用行(列)展开公式,例如按第一行展开

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix}$$

$$= -ad\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad-bc)(-ad+bc)$$

$$= -(ad-bc)^2.$$

【分析二】 本题 0 的位置很规则,也可联想到用拉普拉斯展开式.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix} = -(ad-bc)^2.$$

注:记号(2014, $\begin{smallmatrix}1\\2,3\end{smallmatrix}$) 是指本题选自 2014 年数学一,数学二,数学三的真题,下同. 本题是常规基础题吧?但本题三个卷种的难度系数分别是 0.623,0.608,0.607,是不是有些考生复习的还不到位?

【例 1.2】 (1999,2) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　[ ]

学习札记：

【分析】　问方程 $f(x)=0$ 有几个根，也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式. 将第 1 列的 -1 倍依次加至其余各列，有

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第 2 列加到第 4 列}} \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}. \qquad \text{（拉普拉斯(1.9)）}$$

易见 $f(x)$ 是二次多项式，故应选(B).

【评注】　本题难度值 0.55. 由于行列式的每一个位置都含有 x，因此立即展开处理是不妥的，应当先恒等变形消除一些 x 再展开. 不要错误地认为这样的 $f(x)$ 一定是 4 次多项式，其实适当选系数可构造出 0 至 4 任一次数的多项式.

【例 1.3】　计算

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】　各列均加至第 1 列，并按第 1 列展开有

$$D=\begin{vmatrix} x+\sum\limits_{i=1}^{4}a_i & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}=(x+\sum_{i=1}^{4}a_i)\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -x & x & 0 \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}.$$

由(1.7)知，$D=x^3(x+\sum\limits_{i=1}^{4}a_i)$.

【例 1.4】　4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】　对本题可用逐行相加的技巧，第一行的 x 倍加至第二行，然后第二行的 x 倍加至第三行，如此继续，有

学习札记：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & 0 \\ a_1x+a_2 & 0 & -1 & 0 \\ a_1x^2+a_2x+a_3 & 0 & 0 & -1 \\ a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)(-1)^{4+1}(-1)^3$$

$$=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4.$$

也可对第 4 行展开，有

$$D=a_4(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \end{vmatrix}+x\cdot\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ a_2 & x & -1 \\ a_3 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=a_4+x(a_1x^2+a_3+a_2x)$$

$$=a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4.$$

【例 1.5】 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=\underline{\qquad}.$$

【分析】 对于爪型行列式，将其转化为上（或下）三角行列式.

$$D=2\cdot3\cdot4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=24\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=24\times(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4})=24-12-8-6=-2.$$

学习札记：

【评注】 对于 $|\nwarrow|$ 与 $|\searrow|$ 型行列式，可用主对角线元素化其为上（下）三角型来计算.

对于 $|\swarrow|$ 与 $|\nearrow|$ 型行列式，可用副对角线元素化其为 $|\triangledown|$ 或 $|\vartriangle|$ 型来计算.

【例 1.6】 计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】 把第 1 列的 1，−1，1 倍分别加到第 2，3，4 列，再把 1，2，3 行的 −1，1，−1 倍分别加到第 4 行，有

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ x+1 & x & -x & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ x & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=x^4.$$

或，每列都加到第 1 列，提取公因式 x，再把第 1 行的 −1 倍分别加到 2，3，4 行，有

$$D=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 0 & 0 & x & -x\\ 0 & x & 0 & -x\\ 0 & 0 & 0 & -x\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}0 & x & -x\\ x & 0 & -x\\ 0 & 0 & -x\end{vmatrix}=x^4\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=x^4.$$

或

$$D=\begin{vmatrix}0+1 & 0-1 & 0+1 & x-1\\ 0+1 & 0-1 & x+1 & 0-1\\ 0+1 & x-1 & 0+1 & 0-1\\ x+1 & 0-1 & 0+1 & 0-1\end{vmatrix},$$

由于 D 中每列都是两个数之和，可以拆成 2^4 个 4 阶行列式之和，但这些行列式中凡包含 2 个或 2 个以上第 2 子列的行列式的值均为 0，故不为 0 的行列式只有 5 个，即

$$D=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & x\\ 0 & 0 & x & 0\\ 0 & x & 0 & 0\\ x & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & x & -1\\ 0 & x & 0 & -1\\ x & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & x & 1 & 0\\ x & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

学习札记：

$$+\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=x^4-x^3+x^3-x^3+x^3=x^4.$$

【例 1.7】 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

【分析】 按第 1 列展开，有

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{n1}A_{n1}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & a_2 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ & & & 1 \end{vmatrix}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ 1 & a_2 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \quad a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n.$$

本题如果按第 1 行展开，有

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & a_2 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & a_{n-1} \\ & & & 1 \end{vmatrix}+a_1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1+a_1(-1)^{1+2}a_n(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} a_2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n.$$

【例 1.8】 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则 $\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=$ _____.

学习札记：

【分析】　由于 $|kA|=k^n|A|$，以及 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$，只需计算行列式 $|A|$ 的值. 为此可以把第 2,3,…,n 各行均加至第 1 行，提取公因数 $n-1$ 后，再把第 1 行的 -1 倍分别加至第 2,3,…,n 各行，则有

$$|A|=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1).$$

那么 $\left|\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n|A^{-1}|=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n(n-1)}$.

【小结】　在计算行列式时，先把某行(列)的 k 倍分别加到其它的每一行(列)；或者先把各行(列)均加到第一行(列)；或者用逐行(列)相加等手法化简，然后再用展开公式，这些构思是常见的，也是基本的.

关于特殊的三对角线行列式如何计算？

通常可用三角化法、递推法、归纳法.

【例 1.9】　计算 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=$ _____.

【分析】　三角化法用逐行相加的技巧，例如把第 1 行的 $-\frac{1}{4}$ 倍加到第 2 行，再把新第 2 行的 $-\frac{4}{13}$ 倍加到第 3 行，…

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{13} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13}{4} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{40}{13} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{121}{40} \end{vmatrix}=4\cdot\frac{13}{4}\cdot\frac{40}{13}\cdot\frac{121}{40}=121.$$

或用每行都加至第一行的技巧，例如把第 2 行的 -4 倍加到第 1 行，再把第 3 行的 13 倍加到第 1 行，…

学习札记：

$$\begin{vmatrix}4&3&0&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-13&-12&0\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&40&39\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&0&0&-121\\1&4&3&0\\0&1&4&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}$$

$$=-121\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&4&3\\0&1&4\\0&0&1\end{vmatrix}=121.$$

【例 1.10】 (2008,局部) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&1&\\&&\ddots&\ddots&\ddots\\&&a^2&2a&1\\&&&a^2&2a\end{bmatrix}$ 是 n 阶矩阵.

证明 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$.

【证法一】 用归纳法设 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的值为 D_n.

当 $n=1$ 时，$D_1=2a$，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确，

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}2a&1\\a^2&2a\end{vmatrix}=3a^2$，命题 $D_n=(n+1)a^n$ 正确，

设 $n<k$ 时，命题正确.

当 $n=k$ 时，按第一列展开，得

$$D_k=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}$$

$$=2a\begin{vmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=2aD_{k-1}-a^2D_{k-2}$$

$$=2aka^{k-1}-a^2(k-1)a^{k-2}=(k+1)a^k$$

故命题正确.

【证法二】 化为上三角

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a&1&&&\\0&\frac{3}{2}a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \frac{(n+1)a}{n} \end{vmatrix}$$

$$= 2a \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{3}a \cdots \frac{n+1}{n}a = (n+1)a^n.$$

【评注】 数学归纳法

(一) ① 验证 $n=1$ 时，命题 f_n 正确，

② 假设 $n=k$ 时，命题 f_n 正确，

③ 证明 $n=k+1$ 时，命题 f_n 正确.

(二) ① 验证 $n=1$ 和 $n=2$ 时命题 f_n 都正确，

② 假设 $n<k$ 时，命题 f_n 正确，

③ 证明 $n=k$ 时，命题 f_n 正确.

练习 (2016,1,3) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ _____.

学习札记：

抽象行列式

(1) $|A+B|$ 型的计算

【例 1.11】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 4 维列向量，又 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma})$，若 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}|=$ _____.

【分析】 由 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=(3\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma})$，知

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}| &= |3\boldsymbol{\alpha}_1,3\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}| = 27\,|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}| \\ &= 27(|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\gamma}|) = 27(|\boldsymbol{A}|+2|\boldsymbol{B}|) \\ &= 189. \end{aligned}$$

学习札记：

【例 1.12】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$\boldsymbol{A}^*$ 和 $\boldsymbol{B}^*$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$ _____.

【分析】 由 $|\boldsymbol{A}|=3\neq 0$ 知 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 知 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，那么

$$|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^*-\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{A}^{-1}(2\boldsymbol{B}^{-1})-(3\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{B}^{-1}|=|-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}|$$
$$=(-1)^n|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|=\frac{(-1)^n}{6}.$$

当然本题也可用 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 把 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$ 换成 $\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$，

再用 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 来处理.

【例 1.13】$(2010,\frac{2}{3})$ 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，$|\boldsymbol{B}|=2$，$|\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}|=2$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=$ _____.

【分析】 由于 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 没有运算法则，利用 $\boldsymbol{E}$ 作恒等变形是常用技巧.

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}|=|\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{E}|$$
$$=|(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}|$$
$$=|\boldsymbol{B}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3.$$

本题难度分别是 0.515 和 0.539，有近一半的同学做错了！

【例 1.14】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=$ _____.

【分析】 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，有 $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\boldsymbol{E}$，得 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$.

本题 $|\boldsymbol{A}|=3$，故

$$|\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}^*)^{-1}|=|\boldsymbol{A}-\frac{1}{3}\boldsymbol{A}|=|\frac{2}{3}\boldsymbol{A}|=(\frac{2}{3})^3|\boldsymbol{A}|=\frac{8}{9}.$$

【例 1.15】 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*=2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{B}|=$ _____.

【分析】 由于 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，又由题设知 $|\boldsymbol{A}|=3$，因此对已知矩阵方程右乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$3\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-6\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A},$$

即有 $3(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$. 两边取行列式，有

$$27|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{B}|=3.$$

又 $$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1,$$

学习札记：

故 $|\boldsymbol{B}|=\frac{1}{9}$.

(2) 相似，$|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$ 的运用

【例 1.16】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&0\\3&0&0\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ _____.

【分析】 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，按定义知存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，从而

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}^{-1}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E},$$

所以
$$\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}\sim\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}.$$

进而
$$|\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+k\boldsymbol{E}|,$$

于是
$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&3&0\\3&0&1\end{vmatrix}=-6.$$

【例 1.17】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=$ _____.

【分析】 (方法一) 用行列式性质

由 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|&=|\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=|\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,-2\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=-2|\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=-2|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3|\\&=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|.\end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量，知 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq0$，所以 $|\boldsymbol{A}|=2$，从而 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}=4$.

(方法二) 用相似

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)&=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，知 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，从而

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&3\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

那么，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&3\\1&1&2\end{vmatrix}=2$，亦有 $|\boldsymbol{A}^*|=4$.

学习札记：

练习 (1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$，$3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 均不可逆，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ _____.

(2) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，特征值是 1，2，3，若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|=$ _____.

【小结】 对于抽象型行列式的计算，可能会涉及矩阵的运算法则、单位矩阵恒等变形等技巧，可能考查行列式的性质，也可能用特征值、相似等处理，这一类题目计算量一般不会很大，但涉及知识点多，公式法则多.

特征多项式

【例 1.18】 若 $\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$，则 $\lambda=$ ____.

【分析】 这是 λ 的三次方程，对于三次方程尽量用因式分解法求其根.

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ -1 & 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 \\ 1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-6),$$

所以 λ 为 2，3 和 6.

本题的解法很多，例如

学习札记：

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-3 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & \lambda-5 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-6 & 0 \\ -1 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-2).$$

【评注】 对于特征多项式应两行(或列)加加减减，至多是三行(或列)的加加减减找出 $\lambda-a$ 的公因式，然后再解一个二次方程，就可求出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值，这一类行列式的计算要掌握好.

【例 1.19】 若 $\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -a \\ -1 & \lambda+a & 1 \\ -a & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0$，则 $\lambda =$ _____.

【分析】 把第三行加至第一行，第一行有公因式 $\lambda-a-1$，即

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -a \\ -1 & \lambda+a & 1 \\ -a & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-a-1 & 0 & \lambda-a-1 \\ -1 & \lambda+a & 1 \\ -a & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-a-1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+a & 2 \\ -a & 1 & \lambda+a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda+a & 2 \\ 1 & \lambda+a-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-a-1)(\lambda+a-2)(\lambda+a+1),$$

所以 λ 为 $a+1, 2-a, -a-1$.

【评注】 应当会计算这些含参数的行列式.

矩阵秩的概念

在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 k 行与 k 列($k\leqslant m, k\leqslant n$)，位于这些行与列的交叉点上的 k^2 个元素按其在原来矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的次序可构成一个 k 阶行列式，称其为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k 阶**子式**.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零子式的最高阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记为 $r(\boldsymbol{A})$. 零矩阵的秩规定为 0.

例如，矩阵

学习札记：

$$A=\begin{bmatrix}1&3&6&-1&1\\0&2&4&0&3\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$$

中有 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}1&3&-1\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0,$$

而 A 中又没有 4 阶子式，故 A 中不为零的子式最高是 3 阶，所以秩 $r(A)=3$.

关于矩阵的秩要理解清楚：

$r(A)=r\Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0，任何 $r+1$ 阶子式（若还有）必全为 0.

$r(A)<r\Leftrightarrow A$ 中每一个 r 阶子式全为 0.

$r(A)\geqslant r\Leftrightarrow A$ 中有 r 阶子式不为 0.

特别地，$r(A)=0\Leftrightarrow A=O$.

$A\neq O\Leftrightarrow r(A)\geqslant 1$.

若 A 是 n 阶矩阵，$r(A)=n\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow A$ 可逆.

$r(A)<n\Leftrightarrow |A|=0\Leftrightarrow A$ 不可逆.

若 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)\leqslant \min(m,n)$.

关于 $|A|=0$

【例 1.20】 设 A 是 n 阶反对称矩阵，若 A 可逆，则 n 必是偶数.

【证】 因为 A 是反对称矩阵，即 $A^{\mathrm{T}}=-A$，所以

$$|A|=|A^{\mathrm{T}}|=|-A|=(-1)^n|A|.$$

如果 n 是奇数，必有 $|A|=-|A|$，从而 $|A|=0$，与 A 可逆相矛盾. 所以 n 必是偶数.

【注】 n 是偶数是 n 阶反对称矩阵可逆的必要非充分条件. 请举一个简单例子：4 阶不可逆的反对称矩阵，即行列式值为 0.

【例1.21】 设 A 是 n 阶非零矩阵，满足 $A^2=A$，且 $A\neq E$，证明行列式 $|A|=0$.

【证法一】（反证法）若 $|A|\neq 0$，那么 A 可逆，用 A^{-1} 左乘 $A^2=A$ 的两端，得

$$A=A^{-1}A^2=A^{-1}A=E.$$

与 $A\neq E$ 矛盾，故 $|A|=0$.

【证法二】（用秩）据已知有 $A(A-E)=O$，那么

$$r(A)+r(A-E)\leqslant n.$$

因为 $A\neq E$，即 $A-E\neq O$，那么秩 $r(A-E)\geqslant 1$，从而秩 $r(A)<n$，故 $|A|=0$.

【证法三】（用 $Ax=0$ 有非零解）据已知有 $A(A-E)=O$，即 $A-E$ 的

列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，又因 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\neq\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，从而 $|\boldsymbol{A}|=0$.

学习札记：

【评注】 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 是考研题中一个常见的已知条件，对于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 应当有两种思路（参看例 3.27）：

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；

(2) $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

【例 1.22】 (1996，1 改写) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\zeta\zeta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\zeta}$ 为 3 维非零列向量，$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\zeta}$ 的转置，若 $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}=1$，证明 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【证法一】 (用特征值) 由于 $\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}=1$，且 $\boldsymbol{\zeta}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{A\zeta}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\zeta\zeta}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta})=\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}=0\boldsymbol{\zeta}.$$

按定义知 $\lambda=0$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值（$\boldsymbol{\zeta}$ 是属于 $\lambda=0$ 的特征向量），所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【证法二】 (用特征值) 因为 $\boldsymbol{\zeta}$ 是 3 维非零列向量，故 $\boldsymbol{\zeta\zeta}^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的 3 阶矩阵，据 (1.12) 有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\zeta\zeta}^{\mathrm{T}}|=\lambda^3-\lambda^2=0.$$

于是矩阵 $\boldsymbol{\zeta\zeta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值是 1，0，0，从而矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\zeta\zeta}^{\mathrm{T}}$ 的特征值是 0，1，1，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$.

【评注】 本题的证法很多，你还能用别的方法吗？如果对证法二有困难，可在复习完特征值之后再来看这种解法.

克拉默法则

【例 1.23】 三元一次方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\2x_1-x_2+3x_3=4,\\4x_1+x_2+9x_3=16\end{cases}$$

的解中，未知数 x_2 的值必为

(A) 1.　　(B) $\frac{5}{2}$.　　(C) $\frac{7}{3}$.　　(D) $\frac{1}{6}$.　　[　　]

【分析】 因为方程组的系数矩阵行列式是范德蒙行列式，由 (1.11) 有

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&-1&3\\4&1&9\end{vmatrix}=(-1-2)(3-2)(3-(-1))=-12.$$

根据克拉默法则，$x_2=\frac{D_2}{D}$，其中

学习札记：

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&3\\4&16&9\end{vmatrix}=(4-2)(3-2)(3-4)=-2.$$

于是 $x_2=\dfrac{1}{6}$，所以应选(D).

【例 1.24】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&0\\a&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $a=$ _____.

【分析】 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，对 $\boldsymbol{B}$ 按列分块有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{A\beta}_1,\boldsymbol{A\beta}_2,\boldsymbol{A\beta}_3)=(\boldsymbol{0},\boldsymbol{0},\boldsymbol{0}),$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

因 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，即齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，那么由克拉默法则，有

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0\\a&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=a^2+a-2=0,$$

故 $a=1$ 或 -2.

练习

(1996.3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq a_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}$ 的解是_____.

学习札记：

四、练习题精选

1. 填空题

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} =$ _____.

(2) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$ _____.

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$ _____.

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ _____.

(5) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix} =$ _____.

(6) $\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} =$ _____.

(7) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}|=$ _____.

(8) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)$ 如果 $|\boldsymbol{A}|=1$，那么 $|\boldsymbol{B}|=$ _____.

学习札记：

2. 选择题

(1) 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$.　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$.　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

[　　]

(2) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为 4 维列向量，已知 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3| = 5$，$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3| = -1$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| =$

(A) 4.　　(B) 6.　　(C) 32.　　(D) 48.　　[　　]

(3) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 4 维列向量，若 4 阶行列式

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}| = a,\ |\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3| = b,$$

那么 4 阶行列式 $|2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1| =$

(A) $2a - b$.　　(B) $2b - a$.　　(C) $-2a - 2b$.　　(D) $-2a + 2b$.

[　　]

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 的必要条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 的两行元素对应成比例.

(B) $\boldsymbol{A}$ 中必有一行为其余各行的线性组合.

(C) $\boldsymbol{A}$ 中有一列元素全为 0.

(D) $\boldsymbol{A}$ 中任一列均为其余各列的线性组合.　　[　　]

3. 解答题

(1) 求 x 的值

(A) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 2 & 0 & x-5 \end{vmatrix} = 0$;　　(B) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 3 & 3 & x & 6 \\ 4 & 4 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$.

(2) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{E}, \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{E}$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}| = 0$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times m$ 矩阵，证明当 $m > n$，必有行列式 $|\boldsymbol{AB}| = 0$.

(4) 已知 a,b,c 不全为零，证明齐次方程组

$$\begin{cases} ax_2 + bx_3 + cx_4 = 0, \\ ax_1 + x_2 = 0, \\ bx_1 + x_3 = 0, \\ cx_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

只有零解.

学习札记：

答案与提示

1.(1)1. (2)x^3+2x^2+3x+4.

(3)$n!$. (4)$\frac{1}{2}n(n+1)$.

(5)$a^n+(-1)^{n+1}b^n$. (6)$b^{n-1}(\sum a_i+b)$.

(7)$-3\cdot 2^{2n-1}$. (8)2.

【提示】

(1) 逐行相加.

(2) 按第 1 列展开;或逐列相加.

(3) 把第一行分别加至其它各行.

(4) 把每列均加至第 1 列.

(5) 本题已有大量的 0,可立即用展开公式来计算,建议按第 1 行展开,比按第 1 列展开要简洁.

(6) 把各列均加至第1列,提取公因式$b+\sum a_j$,然后把第1行的-1倍分别加至其余各行,可得上三角行列式.或第 1 行的 -1 倍分别相加到每一行,变为爪型.

(7) 你会的.

(8) 参考例 1.17.

2.(1)(D). (2)(C). (3)(C). (4)(B).

【提示】

(1) 和 2014 考题一样吧?

(2)$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_1,2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3|=8|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|$

$=8(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3|)$.

(3)$|\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|+|\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$

$=-|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1|-|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\gamma}|$.

(4)(A)、(C) 均是 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的充分条件并不必要,只要有一行(列) 是其余各行(列) 的线性组合就可保证 $|\boldsymbol{A}|=0$.

3.(1)(A)5,6,0. (B)1,2,6.

【提示】

(A) 把第 2 行的 -2 倍加至第 3 行,可出 $x-5$ 的公因式,即

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 2 & 0 & x-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & -2(x-5) & x-5 \end{vmatrix}$$

$$=(x-5)\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

学习札记：

$$=(x-5)\begin{vmatrix} x-1 & 5 & 2 \\ 1 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x-5)(x^2-6x).$$

(B) 把第 1 行的 -3 倍、-4 倍分别加至第 3 行与第 4 行，可用拉普拉斯展开式，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 3 & 3 & x & 6 \\ 4 & 4 & 6 & x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 3 & 1 \\ 0 & 0 & x-3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & x-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-3 & 3 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix}=0.$$

(2) 由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}.$$

因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}$，故齐次方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，从而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

(3) 因为 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶矩阵，行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$ 的充分必要条件是秩 $r(\boldsymbol{AB})<m$. 由于

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant \min(m,n),$$

可见当 $m>n$ 时，必有

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant n<m.$$

(4) 由于系数行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -a^2-b^2-c^2 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-(a^2+b^2+c^2)\neq 0.$$

第二章　矩阵——基础，防混淆！

一、知识结构网络图

- 矩阵
  - 概念 — $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的表格
  - 运算 — $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B},k\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{AB}$；$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
    - 方阵的幂
    - 分块矩阵
  - 初等变换
    - 初等矩阵
      - 初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 所得 $\boldsymbol{PA}$ 就是对 $\boldsymbol{A}$ 作了一次与 $\boldsymbol{P}$ 同样的行变换
      - $\boldsymbol{E}_i^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k}),\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}=\boldsymbol{E}_{i,j},\boldsymbol{E}_{i,j}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{i,j}(-k)$
    - 等价　$\boldsymbol{A}\dashrightarrow\cdots\dashrightarrow\boldsymbol{B}\iff\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆
  - 逆矩阵
    - 求法
      - 用定义
      - $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{行}}(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1})$
      - 用伴随 $\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$
      - 用分块 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$
    - 证法
      - $|\boldsymbol{A}|\neq 0$
      - $r(\boldsymbol{A})=n$
      - 特征值
      - 反证法
  - 秩
    - 计算　初等变换法　定义法
    - 公式　参看本章主要公式
  - 特殊矩阵
    - 伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$
    - 对称矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\iff a_{ij}=a_{ji}$
    - 反对称矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}\iff a_{ii}=0,a_{ij}=-a_{ji}$
    - 正交矩阵 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\iff\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$
    - 对角矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1&&\\&b_2&\\&&b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1&&\\&a_2b_2&\\&&a_3b_3\end{bmatrix}$，

      $\boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2=\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1,\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_1^n&&\\&a_2^n&\\&&a_3^n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}&&\\&\frac{1}{a_2}&\\&&\frac{1}{a_3}\end{bmatrix}$，

      其中 $a_1a_2a_3\neq 0$.

学习札记：

【评注】 矩阵是线性代数的核心内容，它贯彻线性代数的始终．复习时要引起考生足够的重视，概念要清晰，符号要习惯，运算要正确、迅速、简捷．

(1) 理解矩阵的概念，了解几种特殊矩阵（单位矩阵、对角矩阵、数量矩阵、三角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵、正交矩阵）的定义及性质．

(2) 掌握矩阵运算（加、减、数乘、乘法）及其运算规律，掌握矩阵转置的性质，掌握行列式乘法公式，了解方阵的幂．

(3) 理解逆矩阵的概念，掌握矩阵可逆的充要条件，掌握可逆矩阵的性质，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求矩阵的逆．

(4) 掌握矩阵的初等变换，了解初等矩阵的性质及矩阵等价的概念，理解矩阵秩的要领，掌握用初等变换求矩阵的逆和秩．

(5) 了解分块矩阵的概念，掌握分块矩阵的运算．

今年考题

(2018，$\begin{matrix}1\\2,3\end{matrix}$) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $r(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩，$(\boldsymbol{X}\quad\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵，则

(A) $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})$．　　(B) $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{A})$．

(C) $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$．　(D) $r(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$．

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

(一) 矩阵及相关的概念

定义 2.1 $m\times n$ 个数排成如下 m 行 n 列的一个表格

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为是一个 $m\times n$ 矩阵. 当 $m=n$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵.

如果一个矩阵的所有元素都是 0，即

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

则称这个矩阵是零矩阵，可简记为 $\boldsymbol{O}$.

两个 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$，如果对应的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的元素所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记成 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

(二) 矩阵的运算与法则

定义 2.2 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，则 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

定义 2.3 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，k 是一个常数，则 $m\times n$ 矩阵 $[ka_{ij}]$ 称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数乘，记为 $k\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，k,l 是常数，则矩阵的加法和数乘运算满足：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；　(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；　(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；　(6) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(7) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；　(8) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$.

学习札记：

定义 2.4 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是 $n\times s$ 矩阵，那么 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

矩阵的乘法可图示如下：

$$\begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nj} & \vdots \end{bmatrix} \\ j \end{array}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \cdots & \vdots & \cdots \\ & c_{ij} & \\ & \vdots & \end{bmatrix} i \\ j \end{array}$$

$$m\times n \qquad n\times s \qquad m\times s$$

矩阵乘法有下列法则：

(1) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$;

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$;

(3) $(k\boldsymbol{A})(l\boldsymbol{B})=kl\boldsymbol{AB}$;

(4) $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$;

(5) $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$.

【评注】 矩阵的乘法运算是重要的、基本的，也是一些考生不重视常出错的地方.

关于矩阵乘法要注意三个方面：

(1) 矩阵乘法没有交换律，一般情况 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\\1&2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix}.$$

特别地 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$，但 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$.

(2) 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-3\\-1&3\end{bmatrix}$，虽然 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-3\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

在这里，矩阵运算与数的运算不要混淆.

学习札记：

(3) 由 $AB = AC, A \neq O \nRightarrow B = C$.

例如，$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$，有

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 24 \end{bmatrix},$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 24 \end{bmatrix},$$

显然 $B \neq C$.

定义 2.5　把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记为 A^{T}.

例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(三) 伴随矩阵

设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶矩阵，行列式 $|A|$ 的每个元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下的矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 的**伴随矩阵**.

【评注】　设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，由行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 得到代数余子式

$A_{11} = d, A_{12} = -c, A_{21} = -b, A_{22} = a$，所以矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

对于 2 阶矩阵，用**主对角线元素对换，副对角线元素变号**即可求出伴随矩阵.

例如，$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(四) 逆矩阵

设 A 是 n 阶矩阵，如果存在 n 阶矩阵 B 使得 $AB = BA = E$（单位矩阵）成立，则称 A 是**可逆矩阵**或**非奇异矩阵**，B 是 A 的逆矩阵.

例如，$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

所以矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 可逆，且 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

学习札记：

当然亦有$\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.

(五) 矩阵的初等变换和初等矩阵

定义 2.6 对 $m\times n$ 矩阵，下列三种变换

(1) 用非零常数 k 乘矩阵的某一行(列)；

(2) 互换矩阵某两行(列) 的位置；

(3) 把某行(列) 的 k 倍加至另一行(列)

称为矩阵的初等行(列) 变换，统称为矩阵的初等变换.

定义 2.7 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 等价，记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

初等矩阵：单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵.

例如，3 阶单位矩阵作如下初等变换

$\boldsymbol{E}_{1,2}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{E}$ 一、二两行互换(或一、二两列互换)

$\boldsymbol{E}_{21}(3)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{E}$ 第一行的 3 倍加至第二行(或第二列的 3 倍加至第一列)

$\boldsymbol{E}_{3}(-2)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{E}$ 第三行乘以 -2(或第三列乘以 -2)

均是初等矩阵.

(六) 正交矩阵

n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

【评注】 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$

$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Rightarrow |\boldsymbol{A}|^2=1$

重要定理

定理 2.1 (行列式乘法公式) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，则

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|.$$

定理 2.2 若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 2.3 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$

学习札记：

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的列(行)向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s$，$\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是初等矩阵

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵等价

$\Leftrightarrow$ 0 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

定理 2.4　若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$，则必有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.

【评注】　按可逆矩阵定义，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵. 由定理 2.4，如 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵，且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 则可保证 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，因而用定义法求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 时我们的工作量可减少一半，只需检验 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 就可以了. 但要注意的是定理 2.4 的条件 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵不能忽略. 显然，对于

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

但我们并不能说 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

定理 2.5　用初等矩阵 $\boldsymbol{P}$ 左(右)乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，其结果 $\boldsymbol{PA}(\boldsymbol{AP})$ 就是对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次相应的初等行(列)变换.

定理 2.6　初等矩阵均可逆，且其逆是同类型的初等矩阵，即

$$\boldsymbol{E}_i^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_i\left(\frac{1}{k}\right),\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{ij}(-k),\boldsymbol{E}_{ij}^{-1}=\boldsymbol{E}_{ij}.$$

定理 2.7　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

定理 2.8　秩 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩.

定理 2.9　矩阵经初等变换后秩不变.

主要公式

(1) 转置

$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

(2) 可逆

$(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；$(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}\quad(k\neq 0)$；

$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；$(\boldsymbol{A}^n)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^n$；

学习札记：

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-1};|A^{-1}|=\frac{1}{|A|};$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}.$$

(3) 伴随

$$AA^{*}=A^{*}A=|A|E;$$

$$A^{*}=|A|A^{-1};|A^{*}|=|A|^{n-1};$$

$$(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}=\frac{1}{|A|}A;$$

$$(A^{*})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{*};(kA)^{*}=k^{n-1}A^{*};(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}A;$$

$$r(A^{*})=\begin{cases}n, & \text{如果 } r(A)=n,\\ 1, & \text{如果 } r(A)=n-1,\\ 0, & \text{如果 } r(A)<n-1.\end{cases}$$

(4) 秩

$r(A)=r(A^{\mathrm{T}});r(A^{\mathrm{T}}A)=r(A)$；

当 $k\neq 0$ 时，$r(kA)=r(A)$；

$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B)$；

$r(AB)\leqslant \min(r(A),r(B))$；

若 A 可逆，则 $r(AB)=r(B),r(BA)=r(B)$；

若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，$AB=O$，则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.

(5) 分块矩阵

对矩阵适当地分块处理，有如下运算法则：

$$\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1 & B_2\\ B_3 & B_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1+B_1 & A_2+B_2\\ A_3+B_3 & A_4+B_4\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X & Y\\ Z & W\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}AX+BZ & AY+BW\\ CX+DZ & CY+DW\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}}\\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}}\end{bmatrix};$$

若 B,C 分别是 m 阶与 s 阶矩阵，则 $\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{n}=\begin{bmatrix}B^{n} & O\\ O & C^{n}\end{bmatrix}$；

若 B,C 分别是 m 阶与 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{bmatrix}B & O\\ O & C\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1} & O\\ O & C^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}O & B\\ C & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ B^{-1} & O\end{bmatrix};$$

若 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵且 $AB=O$，对 B 和 O 矩阵按列分块有

$$AB=A[b_1,b_2,\cdots,b_s]=[Ab_1,Ab_2,\cdots,Ab_s]=[0,0,\cdots,0],$$

学习札记：

$$Ab_i = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,s),$$

即 B 的列向量是齐次方程组 $Ax = 0$ 的解.

若 $AB = C$,其中 A 是 $m \times n$ 矩阵,B 是 $n \times s$ 矩阵,则对 B,C 按行分块有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} a_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{12}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_1, \\ a_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}\boldsymbol{\beta}_1 + a_{m2}\boldsymbol{\beta}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{\beta}_n = \boldsymbol{\alpha}_m, \end{cases}$$

可见矩阵 AB 的行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 B 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出.

类似地,对矩阵 A,C 按列分块,有

$$[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_s],$$

由此得

$$\begin{cases} b_{11}\boldsymbol{\gamma}_1 + b_{21}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + b_{n1}\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{\delta}_1, \\ b_{12}\boldsymbol{\gamma}_1 + b_{22}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + b_{n2}\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{\delta}_2, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{1s}\boldsymbol{\gamma}_1 + b_{2s}\boldsymbol{\gamma}_2 + \cdots + b_{ns}\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{\delta}_s, \end{cases}$$

即矩阵 AB 的列向量可由 A 的列向量线性表出.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

矩阵运算

(1) $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$

设 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[2,0,1]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[2,0,1]=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&0&2\\6&0&3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}[1,2,3]=\begin{bmatrix}2&4&6\\0&0&0\\1&2&3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=[1,2,3]\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}=2+0+3=5,\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[2,0,1]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=2+0+3=5.$$

前者 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta\alpha}^{\mathrm{T}}$ 都是 3 阶矩阵(互为转置)，后者 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 都是一个数(相同)，这里的运算要正确，符号不要混淆.

【例 2.1】 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 3 维列向量，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置，

如果 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-2&2&-4\\3&-3&6\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=$ _____.

【分析】 设 $\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}[y_1,y_2,y_3]=\begin{bmatrix}x_1y_1&x_1y_2&x_1y_3\\x_2y_1&x_2y_2&x_2y_3\\x_3y_1&x_3y_2&x_3y_3\end{bmatrix},$$

而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$

注意到 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 正是矩阵 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 的主对角线元素之和，所以本题

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=1+2+6=9.$$

(2) 特殊矩阵的 n 次方

【例 2.2】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&6&4\\-1&-3&-2\\2&6&4\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$ _____.

【分析】 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}[1,3,2]$，故

学习札记：

$$A^2=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}[1,3,2]\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}[1,3,2].$$

因$[1,3,2]\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}=2+(-3)+4=3$,所以

$$A^2=3\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}[1,3,2]=3A.$$

那么　$A^3=A^2\cdot A=3A^2=3^2A$,归纳得 $A^n=3^{n-1}A$.

【评注】　若秩 $r(A)=1$,则 A 可分解为一个列向量与一个行向量的乘积,有 $A^2=lA$ 之规律,从而 $A^n=l^{n-1}A$.

$$A=\begin{bmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}},$$

那么　$A^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=l\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=lA$,

其中　$l=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\sum a_{ii}$.

【例 2.3】　若 $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}$,则 $A^2=$ _____,$A^3=$ _____.

【分析】　由矩阵乘法,有

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix},$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=O.$$

【评注】　对这类 4 阶矩阵,有

$$\begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&0&4&5\\0&0&0&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&24\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\text{而 } A^4=O.\ A^2=?$$

【例 2.4】　若 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$,则 $A^n=$ _____.

学习札记：

【分析】 以例 2.3 为背景，本题可把 $\boldsymbol{A}$ 分解为两个矩阵之和，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n\\&=\boldsymbol{E}^n+n\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{E}^{n-2}\boldsymbol{B}^2\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0&2&3\\0&0&4\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{bmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&2n&4n^2-n\\0&1&4n\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【例 2.5】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&9\\0&0&1&3\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$ _____.

【分析】 由分块矩阵公式 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^n&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^n\end{bmatrix}$，我们只需分别算出 $\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$ 的 n 次幂.

因为
$$\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

故
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}^n&=(3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=(3\boldsymbol{E})^n+n(3\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}\\&=\begin{bmatrix}3^n&0\\0&3^n\end{bmatrix}+n\cdot3^{n-1}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot3^{n-1}\\0&3^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

而矩阵 $\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$ 的秩为 1，有 $\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}^n=6^{n-1}\begin{bmatrix}3&9\\1&3\end{bmatrix}$，从而

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{bmatrix}3^n&n\cdot3^{n-1}&0&0\\0&3^n&0&0\\0&0&3\cdot6^{n-1}&9\cdot6^{n-1}\\0&0&6^{n-1}&3\cdot6^{n-1}\end{bmatrix}.$$

【例 2.6】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AX}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}+2\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{X}^4=$ _____.

学习札记：

【分析】　由矩阵方程，有

$$AX-2X=BA-2B,$$

即

$$(A-2E)X=B(A-2E).$$

因为 $A-2E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$ 可逆，故

$$X=(A-2E)^{-1}B(A-2E),$$

从而

$$X^4=(A-2E)^{-1}B^4(A-2E)$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【评注】　若 $P^{-1}AP=B$，则 $(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=B^2$，即 $P^{-1}A^2P=B^2$. 依此类推，得 $P^{-1}A^nP=B^n$，从而 $A^n=PB^nP^{-1}$.

【例 2.7】　(2004，4) 设 $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为 3 阶可逆矩阵，则 $B^{2004}-2A^2=$ _____.

【分析】　由于 $\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}A^n&O\\O&B^n\end{bmatrix}$，且

$$\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_1^n&&\\&a_2^n&\\&&a_3^n\end{bmatrix},$$

易见

$$\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix},$$

所以

$$A^2=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

从而

$$A^{2004}=(A^2)^{1002}=E.$$

又因　$B=P^{-1}AP$ 有 $B^{2004}=P^{-1}A^{2004}P=P^{-1}EP=E$，

故

$$B^{2004}-2A^2=E-2A^2=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{bmatrix}.$$

学习札记：

伴随矩阵

【例 2.8】 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -5 & 7\end{bmatrix}$,　　(2)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

【分析】 (1) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

故 $\begin{bmatrix}1 & 3\\ -5 & 7\end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix}7 & -3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$.

【注】 2 阶矩阵的伴随矩阵:主对角线元素互换,副对角线元素变号.

(2) 由于 $A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1$,

$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1, A_{21}=5$, $A_{22}=3$,

$A_{23}=-1$, $A_{31}=3$, $A_{32}=3$, $A_{33}=-1$,

故 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}-1 & 5 & 3\\ -1 & 3 & 3\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

【例 2.9】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,由于 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,又 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,故有

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}\quad\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|},$$

$$\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\boldsymbol{E}\quad\Rightarrow(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}.\qquad(1)$$

因为对于任何 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,公式 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 恒成立,那么对于 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 亦应有 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{E}$,从而

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=|\boldsymbol{A}^{-1}|\boldsymbol{A}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.\qquad(2)$$

比较(1)、(2) 得

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}.$$

【例 2.10】 (1996,3) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异($n\geqslant 2$),$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则

(A)$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$.　　(B)$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$.

(C)$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.　　(D)$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$.　　[　　]

学习札记：

【分析】 因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 有

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{n-1} \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A},$$

故应选(C).

【例 2.11】 (2009 $\begin{matrix}1\\2,3\end{matrix}$) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵. 若 $|\boldsymbol{A}| = 2$，$|\boldsymbol{B}| = 3$，则分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.　　[　　]

【分析】 由拉普拉斯展开式(1.10) 有

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix} = (-1)^{2\times 2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = 6.$$

那么，矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 可逆，从而

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^* = \begin{vmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}^{-1} = 6\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}.$$

所以应选(B).

【评注】 本题考查的知识点有 3 个：一是用公式 $\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 求伴随矩阵，二是行列式的拉普拉斯展开式，三是分块矩阵的求逆公式. 这些都是线性代数中很基础的知识.

【例 2.12】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，证明：

$$r(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & 若\ r(\boldsymbol{A}) = n,\\ 1, & 若\ r(\boldsymbol{A}) = n-1,\\ 0, & 若\ r(\boldsymbol{A}) < n-1.\end{cases}$$

【证】 若秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$，则 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，故 $|\boldsymbol{A}^*| \neq 0$，所以秩 $r(\boldsymbol{A}^*) = n$.

若秩 $r(\boldsymbol{A}) < n-1$，则 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $n-1$ 阶子式均为 0，即行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的所有代数余子式均为 0，即 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$，故 $r(\boldsymbol{A}^*) = 0$.

若秩 $r(\boldsymbol{A}) = n-1$，则 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 且 $\boldsymbol{A}$ 中存在 $n-1$ 阶子式不为 0. 那么，由 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O},$$

从而 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{A}^*) \leqslant n$，得 $r(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$.

学习札记：

又因 A 中有 $n-1$ 阶子式非0，知有 $A_{ij}\neq 0$，即 $A^*\neq O$，得 $r(A^*)\geqslant 1$，故 $r(A^*)=1$.

练习 (2005,3) 设矩阵 $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ 满足 $A^*=A^T$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵，若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(B) 3.　　(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) $\sqrt{3}$.

可逆矩阵

【例 2.13】 若 $A=\begin{bmatrix}0&1&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，则 $A^{-1}=$ _____.

【分析】 求逆是基础知识不要忘记，不要麻痹大意. 两个基本求法：

(用伴随矩阵) 按例 2.8 求出

$$A^*=\begin{bmatrix}-1&5&3\\-1&3&3\\1&-1&-1\end{bmatrix},$$

又

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&-1&0\\1&2&1\end{vmatrix}=2,$$

故

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&5&3\\-1&3&3\\1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

(用初等行变换求 A^{-1})

$$[A\vdots E]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0&1&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&0&-2&-1&1&1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&3&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right],$$

故

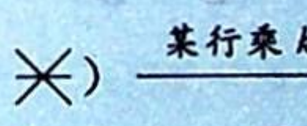
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&5&3\\-1&3&3\\1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

【评注】 (1) 求代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 时，不要忘记正负号，组装伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}$$

时，不要排错位置. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 时不要忘记除以 $|\boldsymbol{A}|$.

(2) 用初等行变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的常规步骤：

$(\boldsymbol{A}\quad\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{由上往下}}$ $\xrightarrow{\text{由下往上}}$  $\xrightarrow{\text{某行乘 }k}$ $(\boldsymbol{E}\quad\boldsymbol{A}^{-1})$.

【例 2.14】 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$ _____.

【分析】 因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

于是

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=4\boldsymbol{E},$$

即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\cdot\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E},$$

故

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}).$$

学习札记：

学习札记：

【例 2.15】 (2002,4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ = _____.

【分析】 由 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 得

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}.$$

又
$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix},$$

故
$$\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}.$$

或直接求出

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 8 & 7\end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 8 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -3\\ 6 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}.$$

【例 2.16】 (2000,2) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 4 阶单位矩阵，且 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$ _____.

【分析】 对于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$ 没有运算法则，通常用单位矩阵恒等变形的技巧化为乘积的形式.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}&=[\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]^{-1}\\&=[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]^{-1}\\&=[(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})]^{-1}\\&=[2(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}]^{-1}\\&=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

【例 2.17】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，若 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{E}$，化简 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$.

【解】 原式 $=[\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}][\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}]^{-1}$

$$=[\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}][(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}]^{-1}$$

学习札记：

$$= [E + B(A^{T})^{-1}][(A^{-1})^{-1}(A-B)^{-1}]$$
$$= [E + BA^{-1}][A(A-B)^{-1}]$$
$$= (A+B)(A-B)^{-1}.$$

又$(A-B)^2 = E$，故$(A-B)^{-1} = A-B$，从而原式$=(A+B)(A-B)$.

【例 2.18】 已知A,B均为n阶矩阵，且A与$E-AB$都是可逆矩阵，证明$E-BA$可逆.

【证】 $|E-BA| = |A^{-1}A - BA| = |(A^{-1}-B)A|$
$$= |A^{-1}-B||A| = |A||A^{-1}-B|$$
$$= |A(A^{-1}-B)| = |E-AB| \neq 0,$$

故$E-BA$可逆.

【例 2.19】 设$H = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$，其中$A,B$分别是$m$阶和$n$阶可逆矩阵，证明矩阵$H$可逆，并求其逆.

【证】 因为A,B可逆，由拉普拉斯展开式(1.9)有

$$|H| = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B| \neq 0,$$

所以矩阵H可逆.

设$H^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$，则$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & E_n \end{bmatrix}$，即

$$\begin{cases} AX + CZ = E, \\ AY + CW = O, \\ BZ = O, \\ BW = E, \end{cases} \text{解出} \begin{cases} X = A^{-1}, \\ Y = -A^{-1}CB^{-1}, \\ Z = O, \\ W = B^{-1}, \end{cases}$$

故
$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

练习　设A,B,C均为n阶矩阵，E为n阶单位矩阵，若$B = E + AB$，$C = A + CA$，则$B - C =$

(A)E.　　(B)$-E$.　　(C)A.　　(D)$-A$.

学习札记：

初等矩阵

【例 2.20】 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\\a_{31}+2a_{11}&a_{33}+2a_{13}&a_{32}+2a_{12}\end{bmatrix},$$

$$P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},P_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix},$$

则 $B=$

(A)P_3AP_2.　　(B)P_2AP_3.　　(C)P_3AP_1.　　(D)P_2AP_1.

[　　]

【分析】 观察到把矩阵 A 的第一行的 2 倍加至第三行，然后再二、三两列对换即得到矩阵 B，这里的初等行变换应该用 P_3 来实现，初等列变换应该用 P_1 来完成，故 $B=P_3AP_1$. 应选(C).

【例 2.21】 已知

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}+2a_{31}&a_{23}+2a_{33}&a_{22}+2a_{32}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{bmatrix},$$

若 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}=$ _____.

【分析】 A 经过行变换(第 3 行的 2 倍加至第 2 行)和列变换(2、3 两列互换)得到矩阵 B，即

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

所以

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}A^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&0&6\\0&4&-3\end{bmatrix}.$$

学习札记：

【例 2.22】 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{2010}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2011}=$ _____.

【分析】 因为 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2011}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}.$$

又因 $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\5&4&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix},$$

故

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}^{2010}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\boldsymbol{\alpha}_3+2010(2\boldsymbol{\alpha}_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&3&2\\16085&12064&8043\end{bmatrix}.$$

【评注】 初等矩阵 n 次方：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\nk&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&k^n&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2n}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2n-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【例 2.23】 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 列与第 3 列交换得矩阵 $\boldsymbol{B}$，把 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列的 -2 倍加到第 3 列得矩阵 $\boldsymbol{C}$，则满足 $\boldsymbol{PA}^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}$ 的矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为

(A) $\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$. (B) $\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$. (C) $\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$. (D) $\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$.

【分析】 按已知，右乘初等矩阵为列变换，有

学习札记：

$$A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=B,B\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=C,$$

于是
$$A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=C,$$

从而
$$\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}A^{-1}=C^{-1},$$

故
$$P=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

所以应选(B).

【例 2.24】 $(2005,\frac{1}{2})$ 设 A 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，A^* 与 B^* 分别为 A 和 B 的伴随矩阵，则

(A) 交换 A^* 的第一列与第二列，得 B^*.

(B) 交换 A^* 的第一行与第二行，得 B^*.

(C) 交换 A^* 的第一列与第二列，得 $-B^*$.

(D) 交换 A^* 的第一行与第二行，得 $-B^*$. [ ]

【答案】 (C)

【分析】 按题意，有 $E_{12}A=B$，于是 $A^{-1}E_{12}^{-1}=B^{-1}$.

因为 $E_{12}^{-1}=E_{12}$，有 $A^{-1}E_{12}=B^{-1}$. 又因矩阵 A 的两行互换得到 B，故 $|A|=-|B|$，于是 $A^*E_{12}=-B^*$，即 A^* 的一、二两列互换得到 $-B^*$. 所以应选(C).

【评注】 本题考查初等矩阵的两个定理，一是左乘右乘，二是初等矩阵的逆矩阵公式. 如果对 n 阶初等矩阵的符号不习惯，不妨把 A 想成是 3 阶矩阵，那么

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}A=B\Rightarrow A^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=B^{-1}\Rightarrow A^{-1}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=B^{-1}$$

$$\Rightarrow\frac{A^*}{|A|}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\frac{B^*}{|B|}\Rightarrow A^*\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=-B^*$$，所以应选(C).

学习札记：

【例 2.25】　与矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&9\end{bmatrix}$ 等价的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.　(D) 以上都不正确.

[　　]

【分析】　显然行列式 $|A|=0$，但矩阵 A 中有 2 阶子式非零，故秩 $r(A)=2$. 由于矩阵等价的充要条件是秩相等，所以与 A 等价的矩阵是(B).

其实，把矩阵 A 第 1 行的 -2 倍加至第 2 行，再把第 1 列的 -2 倍加至第 2 列，然后 2、3 两行对换后再 2、3 两列对换，最后第 2 行乘以 $\frac{2}{9}$ 即得(B).

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&0\\0&0&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&9\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&9&0\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

请你用初等矩阵把上述初等变换描述清楚写成 $PAQ=B$ 的形式.

练习　(2012，1，$\frac{2}{3}$) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$. 若 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，$Q=[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3]$，则 $Q^{-1}AQ$ 为

(A) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　(C) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

学习札记：

正交矩阵

【例 2.26】 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $k\neq 0$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则 $k=$ _____.

【分析】 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$. 因为

$$(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$$
$$=\boldsymbol{E}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+k\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+k^2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},$$

且
$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,1)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=6,$$

故
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}+(2k+6k^2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow 2k+6k^2=0.$$

又 $k\neq 0$，故 $k=-\dfrac{1}{3}$.

【例 2.27】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$ 是正交矩阵，那么

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

即有 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1,a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0,a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0,$

$b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=0,b_1^2+b_2^2+b_3^2=1,b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0,$

$c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=0,c_1b_1+c_2b_2+c_3b_3=0,c_1^2+c_2^2+c_3^2=1.$

若令 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_1,a_2,a_3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[b_1,b_2,b_3]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[c_1,c_2,c_3]^{\mathrm{T}}$，

则上述关系式表明：

$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0,\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,$

$\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=1,\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=0,$

$\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0,\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_3=1,$

说明正交矩阵的列向量长度均为 1，列向量两两正交.

类似地，利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ 可知正交矩阵的行向量长度均为 1，行向量两两正交.

【例 2.28】 在实对称矩阵求特征向量构造正交矩阵的问题上，常见的错误是：

(1) $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$；

学习札记：

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

这 4 个矩阵都不是正交矩阵！要想清原因，引以为戒.

【例 2.29】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均 n 阶正交矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|=0$，证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

【证】
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= |\boldsymbol{EA}+\boldsymbol{BE}| = |(\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})| \\ &= |\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}| \\ &= |\boldsymbol{B}|\cdot|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}|\cdot|\boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{B}|^2\cdot|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \\ &= -|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|,\text{(注意对正交矩阵 } \boldsymbol{B}\text{，有 } |\boldsymbol{B}|^2=1)\end{aligned}$$
所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

【评注】 处理行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 时，要注意单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 恒等变形的技巧. 本题若由 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{B}|$ 用 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 置换 $\boldsymbol{E}$ 也是一样的.

【例 2.30】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^*$ 是正交矩阵.

【证明】 因 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，有 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是
$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$
从而 $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|^2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$.

同理 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{E}$.

所以 $\boldsymbol{A}^*$ 是正交矩阵.

矩阵方程

对于矩阵方程，经恒等变形之后有三种可能的形式：
$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B};\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B};\boldsymbol{AXC}=\boldsymbol{B}.$$
如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 是可逆的，则依次有
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B};\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1};\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BC}^{-1}.$$
然后经计算就可求出 $\boldsymbol{X}$.

因为矩阵乘法没有交换律，所以在恒等变形时，运算法则一定要正确.

【例 2.31】 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是 3 阶矩阵，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足
$$\boldsymbol{AXA}-\boldsymbol{BXB}=\boldsymbol{BXA}-\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{E},$$
其中 $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{X}=$

(A) $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2)^{-1}$.　(B) $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$.　(D) 条件不足，不能确定.　[　]

学习札记：

【分析】 据已知，有

$$AXA - BXA + AXB - BXB = E,$$

即

$$(A-B)XA + (A-B)XB = E,$$

亦即

$$(A-B)X(A+B) = E.$$

上式右端是单位矩阵，说明矩阵 $A-B$，$A+B$ 均可逆，那么左乘 $(A-B)^{-1}$，右乘 $(A+B)^{-1}$，即知 $X=(A-B)^{-1}(A+B)^{-1}$，故应选(B).

【例 2.32】 (2000,1) 设矩阵 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，其中 E 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 B.

【解】 由 $|A^*| = |A|^{n-1}$，有 $|A|^3 = 8$，得 $|A| = 2$. 用 A 右乘矩阵方程的两端，得

$$AB - B = 3A.$$

因为 $A^*A = AA^* = |A|E$，用 A^* 左乘上式的两端，并将 $|A| = 2$ 代入，得

$$(2E - A^*)B = 6E.$$

于是 $2E - A^*$ 是可逆矩阵，从而

$$B = 6(2E - A^*)^{-1}$$

$$= 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = 6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

练习 (2015,2,3) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$，且 $A^3 = O$.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X.

学习札记：

四、练习题精选

1. 填空题

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，且所有元素都是 -1，则 $\boldsymbol{A}^4+2\boldsymbol{A}^3=$ _____.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，满足 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^3=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^3$，则 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=$ _____.

(3) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & -2\\ 2 & a & 3\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $a=$ _____.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{B}=$ _____.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=4$，则 $\left|\boldsymbol{A}^*-(\frac{1}{2}\boldsymbol{A})^{-1}\right|=$ _____.

2. 选择题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 $n(n\geqslant 3)$ 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq 0,\pm 1$，则必有 $(k\boldsymbol{A})^*=$

(A) $k\boldsymbol{A}^*$.　(B) $k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.　(C) $k^n\boldsymbol{A}^*$.　(D) $k^{-1}\boldsymbol{A}^*$.　[　　]

(2) $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，则必有

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2$.　(B) $|\boldsymbol{B}|\neq 0$.

(C) $|\boldsymbol{B}^*|\neq 0$.　(D) $|\boldsymbol{A}^*|=0$.　[　　]

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & a & a\\ a & 1 & a & a\\ a & a & 1 & a\\ a & a & a & 1\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1，则 $a=$

(A) 1.　(B) -1.　(C) $-\frac{1}{3}$.　(D) 3.　[　　]

3. 解答题

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，若 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^m=\boldsymbol{O}$，证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(2) 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}$ 可逆，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单

学习札记：

位矩阵.

证明：(Ⅰ)$A^T = A$；　　(Ⅱ)$A^2 = A$.

答案与提示

1.(1)$\begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}$　(2)$-\dfrac{3A+6E}{13}$　(3)-3　(4)$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$　(5)2

【提示】 (1) 秩 $r(A) = 1$，有 $A^2 = lA$，其中 $l = \sum a_{ii} = -3$.

(2) 由 $(A+E)^3 = (A-E)^3$ 得 $3A^2 + E = O$，进而有

$$(A-2E)(3A+6E) + 13E = O.$$

(3)$AB = O, B \neq O$，说明齐次方程组 $Ax = 0$，有非零解，故 $|A| = 0$. 可将第 3 列加至第 2 列来求 a.

(4)$B = 2(A-E)^{-1}$，要会求二阶逆.

(5) 根据 $(kA)^{-1} = \dfrac{1}{k}A^{-1}$，$A^* = |A|A^{-1}$ 及 $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$，有

$$\left|A^* - (\frac{1}{2}A)^{-1}\right| = |A^* - 2A^{-1}| = |4A^{-1} - 2A^{-1}| = 8|A^{-1}|.$$

2.(1)(B)　　(2)(D)　　(3)(C)

【提示】 (1) 用定义，或加强条件 A 可逆时 $(kA)^*$ 应满足的关系.

(2)$AB = O$ 不能保证 $BA = O$，而 $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$；当 $B \neq O$ 时，行列式 $|B|$ 可以为零亦可不为零，由 B 是否可逆而定.（其实，$|B^*| = |B|^{n-1}$，可见(B) 与(C) 要对就全对，要错就全错，在本题必全错）；由 $AB = O, B \neq O$ 知 $Ax = 0$ 有非零解，那么 $|A| = 0$，从而 $|A^*| = |A|^{n-1} = 0$.

(3) 由于 $r(A)^* = \begin{cases} n, & 若\ r(A) = n, \\ 1, & 若\ r(A) = n-1, \\ 0, & 若\ r(A) < n-1. \end{cases}$

本题 $r(A^*) = 1$ 而 $n = 4$，说明 $r(A) = 3$，故 $|A| = 0$.

因为 $|A| = \begin{vmatrix} 3a+1 & 3a+1 & 3a+1 & 3a+1 \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{vmatrix} = (3a+1)(1-a)^3$，

显然 $a = 1$ 时，$r(A) = 1$，那么只有 $a = -\dfrac{1}{3}$.

3.(1)(用定义法) 因为 $(A+E)^m = O$，即

$$A^m + C_m^1 A^{m-1} + C_m^2 A^{m-2} + \cdots + C_m^{m-1} A + E = O,$$

那么　$A(-A^{m-1} - C_m^1 A^{m-2} - \cdots - C_m^{m-1} E) = E.$

(2)(Ⅰ)$A^{\mathrm{T}} = [E - B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B]^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} - [B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B]^{\mathrm{T}}$

$= E - B^{\mathrm{T}}[(BB^{\mathrm{T}})^{-1}]^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = E - B^{\mathrm{T}}[(BB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]^{-1}B$

$= E - B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B = A.$

(Ⅱ)$A^2 = [E - B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B][E - B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B]$

$= E - 2B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B + B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}BB^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B$

$= E - 2B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B + B^{\mathrm{T}}(BB^{\mathrm{T}})^{-1}B = A.$

学习札记：

第三章　n 维向量——难点，加油！

一、知识结构网络图

- n 维向量
  - 运算
    - 加法、数乘、内积
      - Schmidt 正交化
  - 线性表示
    - 概念：如果 $\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s$，称 β 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出
    - 判定 $\Longleftrightarrow$
      - 方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=\beta$ 有解
      - $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)$
    - 判定 $\Longleftarrow$ $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 无关，$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$ 相关
    - 等价：若 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可互相线性表出
  - 线性相关
    - 概念：若存在不全为 0 的 $k_1,\cdots,k_s$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$
    - 判定
      - 充要条件
        - $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]x=0$ 有非零解
        - $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$
        - 某 α_i 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_s$ 线性表出
      - 充分条件
        - $n+1$ 个 n 维向量
        - 多数向量能用少数向量表示
  - 线性无关
    - 概念：如果 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 则必有 $k_1=0,\cdots,k_s=0$
    - 判定 $\Longleftrightarrow$
      - $[\alpha_1,\cdots,\alpha_s]x=0$ 只有零解
      - $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=s$
      - $\forall i$，α_i 不能由其余的向量表示
    - 判定 $\Longleftarrow$ 阶梯形向量组
  - 极大线性无关组
    - 概念
    - 求法
  - 向量组的秩
    - 矩阵的秩
  - 向量空间*
    - 概念
      - 解空间
    - 基
      - 坐标
      - 过渡矩阵
      - 规范正交基

* 仅数学一要求

学习札记：

【评注】 n 维向量概念抽象，逻辑推理要求高，是线性代数的难点之一，复习时要注意.

(1) 理解向量的线性组合、线性表示、线性相关与线性无关等概念，掌握向量线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

(2) 理解向量组的极大线性无关组的概念，掌握求向量组的极大线性无关组的方法.

(3) 了解向量组等价的概念，理解向量组的秩的概念，了解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系，会求向量组的秩.

(4) 了解向量内积的概念，掌握线性无关向量组正交规范化的施密特(Schmidt)方法.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的有序数组

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}} \text{ 或 } \boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$$

称为 n 维向量，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分量（或坐标），前一个表示式称为列向量，后者称为行向量.

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$，则

向量加法　$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=[a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n]^{\mathrm{T}}$；

数乘向量　$k\boldsymbol{\alpha}=[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n]^{\mathrm{T}}$；

向量内积　$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.

【评注】 (1) 向量 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$ 的长度

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}.$$

例如，$\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1^2+2^2+3^2=14$，那么向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{14}$，而 $\frac{1}{\sqrt{14}}[1,2,3]^{\mathrm{T}}$ 是单位向量.

(2) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\Leftrightarrow a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=0\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

(3) 若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，即 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=0$，称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

定义 3.1　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 n 维向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 是一组实数，称

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合.

定义 3.2　对 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，若存在实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{\beta},$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合，或者说 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出（示）.

例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[3,2]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3=\cdots,$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，且表示法不唯一.

又如 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=[0,3]^{\mathrm{T}}$，那么无论 k_1,k_2 取何值，恒有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出.

定义 3.3　对 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在不全为零的数使得

学习札记：

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性相关**. 否则，称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性无关**（也就是说，当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$ 时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$ 才能成立. 或者说，只要 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 不全为零，那么 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 必不为零）.

例如，对于下列向量组的线性相关性是容易判断的：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [2,3,4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [0,0,0]^{\mathrm{T}}$；

因为
$$0\boldsymbol{\alpha}_1 + 0\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$
组合系数 0,0,1，不全为 0. 故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [2,4,6]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [3,0,5]^{\mathrm{T}}$；

因为
$$2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 0\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$
组合系数 2，−1，0 不全为 0，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [2,3,4]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [3,5,7]^{\mathrm{T}}$；

因为
$$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0},$$
组合系数 1，1，−1 不全为 0，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [0,4,5]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [0,0,6]^{\mathrm{T}}$.

如果 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$，按分量写出，有

$$\begin{cases} k_1 = 0, \\ 2k_1 + 4k_2 = 0, \\ 3k_1 + 5k_2 + 6k_3 = 0. \end{cases}$$

可见 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$，

故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

定义 3.4 设有两个 n 维向量组（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$；（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$；如果（Ⅰ）中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1,2,\cdots,s)$ 都可由（Ⅱ）中的向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则称向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）**线性表出**.

如果（Ⅰ）、（Ⅱ）这两个向量组可以互相线性表出，则称这两个**向量组等价**.

例如，已知向量组

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,0,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [0,1,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = [0,0,1]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = [1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = [1,1,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3 = [1,0,0]^{\mathrm{T}}$；

由
$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1,$$
$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2,$$
知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可互相线性表出，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是等价向量组.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,0,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = [1,2,0]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1 = [2,1,1]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2 = [0,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3 = [3,1,0]^{\mathrm{T}}$.

学习札记：

由

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=-\frac{5}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{5}{2}\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$$

知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，所以向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出. 这两个向量组不等价.

定义 3.5 在向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中，若存在 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 线性无关，再加进任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,\cdots,s)$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\alpha}_j$ 就线性相关，则称 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**极大线性无关组**.

定义 3.6 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组中所含向量的个数 r 称为这个向量组的**秩**.

例如，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_6=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$ 中，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，再添加向量组中的任一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_j$ 必线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6$ 的一个极大线性无关组. 因此，向量组的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6)=2$.

注意向量组的极大线性无关组一般情况下不惟一. 例如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_5$ 也是极大线性无关组，还有 …….

重要定理

定理 3.1 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出

$$\Leftrightarrow \text{非齐次线性方程组}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}\text{ 有解}$$

$$\Leftrightarrow \text{秩 } r[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]=r[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}].$$

定理 3.2 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关

$$\Leftrightarrow \text{齐次线性方程组}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}\text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow \text{向量组的秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)<s.$$

推论 1 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充分必要条件是行列式

学习札记：

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0.$$

推论 2 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

推论3 任何部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 相关 $\Rightarrow$ 整体组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 相关，

整体组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 无关 $\Rightarrow$ 任何部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 无关，反之都不成立.

[$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 及 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（其中 $s>r$），称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的部分组，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是整体组.]

推论4 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Rightarrow$ 延伸组 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性无关；

$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 线性相关 $\Rightarrow$ 缩短组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，反之均不成立.

[向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2}]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm}]^{\mathrm{T}}$ 及 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1=[a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1},\cdots,a_{s1}]^{\mathrm{T}},\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2=[a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2},\cdots,a_{s2}]^{\mathrm{T}},\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m=[a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm},\cdots,a_{sm}]^{\mathrm{T}}$，其中 $s\geqslant r$，则称 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的延伸组（或称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\cdots,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_m$ 的缩短组）]

定理 3.3 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$ 线性相关，则其中必有一个向量可用其余的向量线性表出；反之，若有一个向量可用其余的 $s-1$ 个向量线性表出，则这 s 个向量必线性相关.

定理 3.4 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表示法唯一.

定理 3.5 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，而且 $s>t$，那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. 即如果多数向量能用少数向量线性表出，那么多数向量一定线性相关.

推论 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，且它可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则 $s\leqslant t$.

定理 3.6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$.

推论 如果（Ⅰ），（Ⅱ）是两个等价的向量组，则 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$.

定理 3.7 如果 $r(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 中有 r 个线性无关的列向量，而其他列向量都是这 r 个线性无关列向量的线性组合，也就是 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩.

一般地，$r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\boldsymbol{A}$ 的列秩.

学习札记：

【评注】 (1) 向量组的线性相关(无关)是一抽象概念，在理解时要仔细体会“有一组”与“任一组”，许多错误往往发生在此.

对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，恒有 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是否线性相关，其实就是问除上述情况外，还能否再找到一组数，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 仍能成立？如若可以(即有一组不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$)，则向量组线性相关，如若不行(即对任一组不全为0的数恒有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$)，向量组线性无关.

(2) 要知道3维向量组线性相关(无关)的几何意义，这有助于对概念的理解.

1° $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 坐标成比例

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，则存在不全为0的 k_1,k_2，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}$.

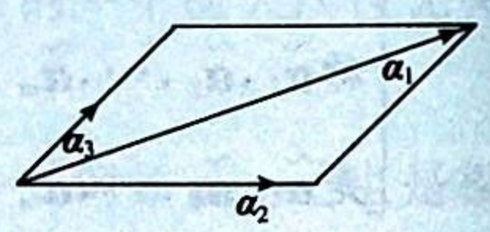
不妨设 $k_1\neq 0$，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线，其坐标成比例.

反过来亦对，略.

2° $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关 $\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则存在不全为0的 k_1,k_2,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$



不妨设 $k_1\neq 0$，于是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3.$$

说明向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 在以 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为边的平行四边形上，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 共面.

反过来亦对，略.

(3) 要搞清向量组的线性相关、齐次方程组有非零解、向量组的秩等知识点的联系与转换；要搞清线性相关、线性表出之间的联系与转换；要掌握性质与判断方法.

例如，若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$.

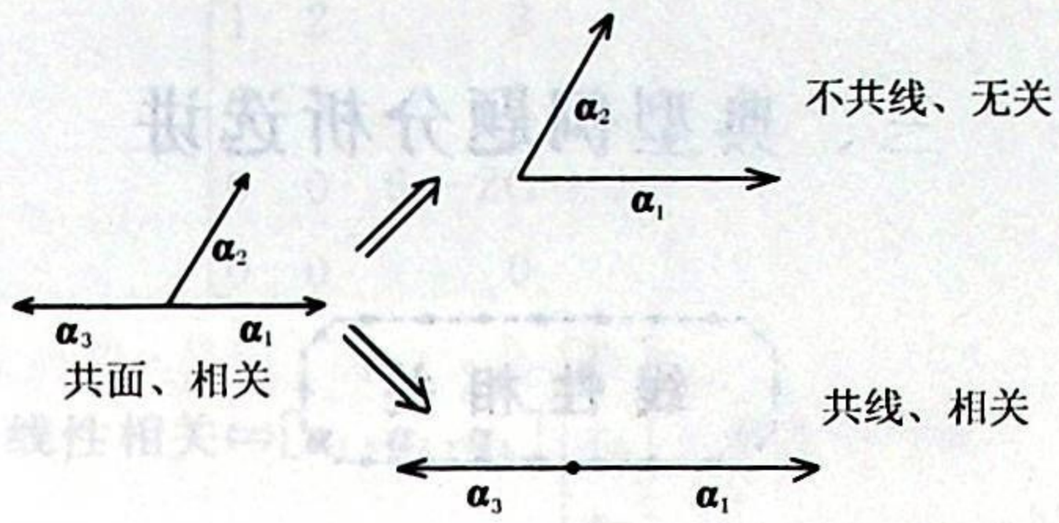
【分析】 (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，故存在不全为0的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

那么有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+0\boldsymbol{\alpha}_{s+1}=\mathbf{0}$，而 $k_1,k_2,\cdots,k_s,0$ 不全为零，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 必线性相关.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 的线性相关性不确定.

从几何上看



从坐标上看 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ 线性相关 $\nearrow$ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$线性无关

$\searrow$ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$线性相关

【评注】 本题(1)实际上是给出定理3.2推论3的一个证明，而(2)表明向量个数的增减对线性相关性的影响是单向的.

学习札记：

学习札记：

三、典型例题分析选讲

线性相关

【例 3.1】 下列向量组中，线性无关的是

(A)$[1,2,3,4]^T,[2,3,4,5]^T,[0,0,0,0]^T$.

(B)$[1,2,-1]^T,[3,5,6]^T,[0,7,9]^T,[1,0,2]^T$.

(C)$[a,1,2,3]^T,[b,1,2,3]^T,[c,3,4,5]^T,[d,0,0,0]^T$.

(D)$[a,1,b,0,0]^T,[c,0,d,6,0]^T,[a,0,c,5,6]^T$. [ ]

【分析】 (A) 中有零向量必线性相关. 因为

$$0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0},$$

系数 0,0,1 不全为 0.

(B) 是 4 个三维向量必线性相关. 定理 3.2 推论 2：$n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

(C) 是 4 个四维向量可用行列式(定理 3.2 推论 1). 由于

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-d\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0,$$

从而线性相关.

(D) 中，因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}\neq 0$，知$[1,0,0]^T,[0,6,0]^T,[0,5,6]^T$ 线性无关，那么其延伸组$[a,1,b,0,0]^T,[c,0,d,6,0]^T,[a,0,c,5,6]^T$ 必线性无关.

【例 3.2】 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,3,4,-2]^T,\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,3,t]^T,\boldsymbol{\alpha}_3=[3,-1,2,0]^T$ 线性相关，则 $t=$ _____.

【分析】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，按分量写出，即有

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0, \\ 4x_1+3x_2+2x_3=0, \\ -2x_1+tx_2=0. \end{cases}$$

对系数矩阵$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & t & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & t+4 & 6 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & t+4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

学习札记：

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6-2(t+4) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \text{ 线性相关} \Leftrightarrow [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow \text{秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) < 3,$$

故 $6-2(t+4)=0$，即 $t=-1$.

【例 3.3】　若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,2,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,6,a,5]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[3,4,7,-1]^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $a=$ _____.

【分析】　4 个 4 维向量计算行列式，有

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & a & 7 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & a-6 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & a-6 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

说明 $\forall a$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 恒线性相关.

注意　例 3.2 和例 3.3 处理手法的差异，前者 s 个 n 维向量转换为齐次方程组来分析，后者 n 个 n 维向量利用行列式简便.

【评注】　线性无关的判定

若向量的坐标没有给出，通常用定义法或用秩的理论来分析判断论证，也要有反证法的构思.

(1) 用定义法证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的框图是：

设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$

$\Downarrow$ 恒等变形 — 乘 / 重组

$k_1=0,k_2=0,\cdots,k_s=0.$

(2) 用秩　$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

$$\Leftrightarrow [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix} = \mathbf{0} \text{ 只有零解}$$

$$\Leftrightarrow \text{秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=s.$$

学习札记：

要注意公式：$r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩，$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B}))$.
若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$，$r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$.
若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

【例 3.4】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 都是 n 维向量，下列命题中错误的是

(A) 如果 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\\ \boldsymbol{\beta}_{s-1}\end{bmatrix}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 如果秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(C) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关.

(D) 如果 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

[　　]

【分析】 当 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出时，并不能保证每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s-1)$ 都不能用其余的向量线性表出. 例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3)^{\mathrm{T}}$，虽然 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性相关的. 所以(D) 不正确.

关于(A)，由 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\beta}_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}\\ \boldsymbol{\beta}_{s-1}\end{bmatrix}$ 线性相关 $\xrightarrow{\text{定理 3.2 推论 4}}$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性相关 $\xrightarrow{\text{定理 3.2 推论 3}}$ $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

关于(B)，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$

$$=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})\leqslant s-1<s.$$

或者，由 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 线性表出，据定理 3.5 亦知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

对于(C)，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，故存在不全为 0 的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$. 此时必有 $k_s=0$，否则 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出. 于是 $k_1,k_2,\cdots,k_{s-1}$ 不全为 0，而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 必线性相关.

【例 3.5】 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

【证】 (用定义，重组)

设 $k_1(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$, (1)

即 $(3k_1-5k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(-k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$. (2)

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

学习札记：

$$\begin{cases}3k_1-5k_3=0,\\2k_1+k_2=0,\\-k_2+4k_3=0.\end{cases}\tag{3}$$

因为 $\begin{vmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{vmatrix}=22\neq 0$，齐次方程组(3)只有零解

$$k_1=0,k_2=0,k_3=0.$$

故向量组 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

【证法二】（用秩）令 $\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$，则

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{bmatrix}.$$

因为矩阵 $\begin{bmatrix}3&0&-5\\2&1&0\\0&-1&4\end{bmatrix}$ 可逆，所以 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，亦即 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,4\boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

【例 3.6】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，若 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

【证】（用定义、同乘）设

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\tag{1}$$

由 $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{A}^{m+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^{m+2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\cdots$，用 $\boldsymbol{A}^{m-1}$ 左乘(1)式两端，并把 $\boldsymbol{A}^{m+1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^{m+2}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},\cdots$ 代入，有

$$k_1\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.\tag{2}$$

因为 $\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故 $k_1=0$.

把 $k_1=0$ 代入(1)式，有

$$k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

同理用 $\boldsymbol{A}^{m-2}$ 左乘上式，可知

$$k_2\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

从而 $k_2=0$.

类似可得 $k_3=0,\cdots,k_m=0$，所以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关.

【证法二】（反证法）如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则有不全为0的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_m\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.\tag{1}$$

设 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 中第一个不为0的是 k_p（即 $k_1=k_2=\cdots=k_{p-1}=0$，$k_p\neq 0,p\geqslant 1$），于是(1)式化为

学习札记：

$$k_pA^{p-1}\alpha+\cdots+k_mA^{m-1}\alpha=0. \tag{2}$$

用 A^{m-p} 乘(2)并把 $A^m\alpha=0,A^{m+1}\alpha=0,\cdots$ 代入，就有 $k_pA^{m-1}\alpha=0$. 又因 $A^{m-1}\alpha\neq 0$，那么 $k_p=0$，与假设矛盾. 故 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

【例 3.7】 设 A 是 n 阶矩阵，α_1、α_2、α_3 是 n 维列向量，若 $A\alpha_1=\alpha_1\neq 0$，$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

【证】 (用定义，同乘) 设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0, \tag{1}$$

由于 $(A-E)\alpha_1=0,(A-E)\alpha_2=\alpha_1,(A-E)\alpha_3=\alpha_2$，用 $A-E$ 左乘(1)式两端，得

$$k_2\alpha_1+k_3\alpha_2=0. \tag{2}$$

再用 $A-E$ 左乘(2)式两端，有

$$k_3\alpha_1=0.$$

因为 $\alpha_1\neq 0$，故 $k_3=0$. 把 $k_3=0$ 代入(2)得 $k_2=0$，再把 $k_2=0,k_3=0$ 代入(1)得 $k_1=0$.

因此，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

【例 3.8】 (2008，$\begin{matrix}2\\3,4\end{matrix}$) 设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

【证】 (用定义，同乘) 由特征值、特征向量的定义，有

$$A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2.$$

设

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0, \tag{1}$$

用 A 乘(1)得

$$-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3(\alpha_2+\alpha_3)=0, \tag{2}$$

(1)－(2)得

$$2k_1\alpha_1-k_3\alpha_2=0.$$

因为 α_1,α_2 是不同特征值的特征向量，α_1,α_2 线性无关，故 $k_1=0,k_3=0$. 代入(1)得 $k_2\alpha_2=0$. 又因 α_2 是特征向量，$\alpha_2\neq 0$，从而 $k_2=0$. 因此，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

【证法二】 (反证法) 因为 α_1,α_2 是矩阵 A 不同特征值的特征向量，所以它们线性无关. 那么如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，则

$$a_3=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2. \tag{1}$$

用 A 左乘(1)式两端，并把 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$ 代入得

$$\alpha_2+\alpha_3=-k_1\alpha_1+k_2\alpha_2. \tag{2}$$

(2)－(1)得 $\alpha_2=-2k_1\alpha_1$，与 α_1,α_2 线性无关相矛盾.

【例 3.9】 设 4 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且与 4 维非零列向量 β_1，β_2 均正交，证明(Ⅰ)β_1,β_2 线性相关，(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$ 线性无关.

学习札记：

【证】 (Ⅰ)(用秩) 构造矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

则矩阵 A 是秩为 3 的 3×4 矩阵. 由于

$$A\boldsymbol{\beta}_i=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},i=1,2,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，于是

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)\leqslant n-r(A)=4-3=1,$$

从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(Ⅱ)(用定义) 设 $$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{0}, \tag{1}$$

用 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}$ 左乘(1)，又 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{0}(i=1,2,3)$，有 $k\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1=0$. 而 $\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1\neq\boldsymbol{0}$，故必有 $k=0$. 把 $k=0$ 代入(1) 得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0},$$

因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故必有

$$k_1=0,k_2=0,k_3=0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1$ 必线性无关.

练习 已知 λ_1,λ_2 是矩阵 A 不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是特征值 λ_1 的线性无关的特征向量，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是特征值 λ_2 的线性无关的特征向量. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

【例 3.10】 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，设

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]C,$$

证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关的充分必要条件是 $|C|\neq 0$.

【证】 记 $A=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$B=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$.

学习札记：

必要性 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则秩 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=3$. 又

$$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AC})\leqslant r(\boldsymbol{C})\leqslant 3,$$

因此秩 $r(\boldsymbol{C})=3$，即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，$|\boldsymbol{C}|\neq 0$.

充分性 若 $|\boldsymbol{C}|\neq 0$，即矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆，那么

$$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AC})=r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3,$$

所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

【例 3.11】 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,a\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $a=$ _____.

【分析】 利用例 3.10.

令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+a\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=a\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$，有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&a\\a&2&0\\0&1&-1\end{bmatrix},$$

从而
$$\begin{vmatrix}1&1&a\\a&2&0\\0&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a+1&a\\a&2&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=a^2+a-2=0,$$

故 $a=1$ 或 $a=-2$.

【例 3.12】 (1997，$\frac{3}{4}$) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$. [ ]

【分析】 利用观察法，易见

(A) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$,

(B) $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$,

故(A)，(B) 均线性相关.

对于(C) 和(D)，简单地加加减减是得不到 0，就不应继续观察下去，而应立即转化为计算行列式(其背景是例 3.10).

由于 $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{vmatrix}=12\neq 0$，故(C) 线性无关. 易见(D) 之行列式为 0，(D) 线性相关.

注意，(C) 与(D) 的行列式不必全都计算，只要算其中之一就可下结论. 本题难度 0.73.

学习札记：

【例 3.13】（定理 3.5 特例）证明：如果 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

【证】 因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，故可设

$$\boldsymbol{\beta}_1 = a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_2 = a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2,$$
$$\boldsymbol{\beta}_3 = a_{13}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{23}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

如果
$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}, \tag{1}$$
即
$$k_1(a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2) + k_2(a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2) + k_3(a_{13}\boldsymbol{\alpha}_1 + a_{23}\boldsymbol{\alpha}_2) = \mathbf{0}, \tag{2}$$
即
$$(a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3)\boldsymbol{\alpha}_1 + (a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + a_{23}k_3)\boldsymbol{\alpha}_2 = \mathbf{0}. \tag{3}$$

由于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

中，方程个数 < 未知数个数，方程组(4) 必有非零解. 那么取 k_1,k_2,k_3 为此方程组的非零解，可知有不全为 0 的 k_1,k_2,k_3 使(3) 成立，从而有不全为 0 的 k_1,k_2,k_3 使(1) 成立，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

【评注】 上述证明若用矩阵描述是简捷的：

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

线性表出

【例 3.14】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [1,2,-3,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = [5,-5,a,11]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = [1,-3,6,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta} = [2,-1,3,b]^{\mathrm{T}}$，试问当 a,b 取何值时 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，并写出其表达式.

【解】 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$，按分量写出，即有

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -3x_1 + ax_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 11x_2 + 3x_3 = b. \end{cases}$$

对增广矩阵 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}]$ 作初等行变换，有

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -3 & -1 \\ -3 & a & 6 & 3 \\ 1 & 11 & 3 & b \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{12-a}{3} & \frac{12-a}{3} \\ 0 & 0 & 0 & b-4 \end{array}\right].$$

学习札记：

如果 $b \neq 4$，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

如果 $b=4$，秩 $r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})$，方程组有解，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(1) 当 $a \neq 12$ 时，$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ & 3 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right]$，

方程组有唯一解：$x_3=1, x_2=0, x_1=1$，即 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(2) 当 $a=12$ 时，$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ & 3 & 1 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right]$，

方程组有无穷多解：$x_2=t, x_3=1-3t, x_1=1-2t$，即

$$\boldsymbol{\beta}=(1-2t)\boldsymbol{\alpha}_1+t\boldsymbol{\alpha}_2+(1-3t)\boldsymbol{\alpha}_3, t \text{ 为任意实数}.$$

【例 3.15】 (2003,4) 设有向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,0,2]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,a+2]^{\mathrm{T}}$；(Ⅱ)：$\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,a+3]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_2=[2,1,a+6]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_3=[2,1,a+4]^{\mathrm{T}}$. 试问：当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价？当 a 为何值时，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价？

【分析】 所谓向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)等价，即向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)可以互相线性表出. 如果方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$$

有解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

如果对同一个 a，三个方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1,$$
$$y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_2,$$
$$z_1\boldsymbol{\alpha}_1+z_2\boldsymbol{\alpha}_2+z_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$$

均有解，则说明向量组(Ⅱ)可以由向量组(Ⅰ)线性表出.

【解】 对 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$ 作初等行变换，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \vdots \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & a+3 & a+6 & a+4 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & a+1 & a+2 & a \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & a+1 & a-1 \end{array}\right].$$

由方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$ 知，只要 $a \neq -1$ 方程组总有唯一解，即 $a \neq -1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 而 $a=-1$ 时，方程组无解，$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

学习札记：

由方程组 $y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_2$ 知，$\forall a$，方程组总有解，即 $\boldsymbol{\beta}_2$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

由方程组 $z_1\boldsymbol{\alpha}_1+z_2\boldsymbol{\alpha}_2+z_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_3$ 知，只要 $a\neq-1$，方程组就有解，$\boldsymbol{\beta}_3$ 就可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

因此，当 $a\neq-1$ 时，向量组（Ⅱ）可由向量组（Ⅰ）线性表出.

反之，由于行列式

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\a+3&a+6&a+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&0\\a+3&a+6&-2\end{vmatrix}=6\neq0,$$

故 $\forall a$，三个方程组 $x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_j(j=1,2,3)$ 恒有解，即 $\forall a$，向量组（Ⅰ）总可由向量组（Ⅱ）线性表出.

因此，$a\neq-1$ 时，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价.

而 $a=-1$ 时，$\boldsymbol{\beta}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，向量组(Ⅰ)与(Ⅱ)不等价.

【评注】 若已知向量的坐标而要判断能否线性表出的问题，通常是转换为非齐次线性方程组是否有解的讨论. 如果向量的坐标没有给出而问能否线性表出，通常用线性相关及秩的理论分析、推理.

练习 (2004,3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)^{\mathrm{T}}$. 试讨论当 a,b 为何值时，

(Ⅰ) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

(Ⅲ) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

学习札记：

【例 3.16】 (2005,2) 确定常数 a，使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

【解法一】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$$

又因为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，故必有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3).$$

由于 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)\leqslant 3$，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，于是

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=-(a+2)(a-1)^2=0,$$

所以 $a=1$ 或 $a=-2$.

若 $a=1$，有 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，但 $\boldsymbol{\beta}_2=(-2,1,4)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

若 $a=-2$，易见

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}=2,$$

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=r\begin{bmatrix}1&-2&-2\\1&-2&-2\\-2&4&-2\end{bmatrix}=2,$$

与 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 相矛盾.

所以 $a=1$ 为所求.

【解法二】 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出，即三个方程组

$$x_{1j}\boldsymbol{\beta}_1+x_{2j}\boldsymbol{\beta}_2+x_{3j}\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_j,(j=1,2,3)$$

同时有解.

学习札记：

练习 (2011，$\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}$) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 线性表示.

(Ⅰ) 求 a 的值；(Ⅱ) 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

【例 3.17】 (1992，1) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，问

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？证明你的结论.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出？证明你的结论.

【解】 (1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

【证法 1】 因为已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，那么它的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关(定理 3.2 推论 3). 又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出(定理 3.4).

【证法 2】 因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故存在不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，其中必有 $k_1\neq 0$. 否则，若 $k_1=0$，则 k_2,k_3 不全为零，使 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，进而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关(定理 3.2 推论 3)，与已知矛盾. 于是 $k_1\neq 0$，由此有 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\dfrac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

【证法 1】 (反证法) 若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，设

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3.$$

由(1)知，$\boldsymbol{\alpha}_1=l_2\boldsymbol{\alpha}_2+l_3\boldsymbol{\alpha}_3$，代入上式整理，得到

$$\boldsymbol{\alpha}_4=(k_1l_2+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_1l_3+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3,$$

学习札记：

即 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，从而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关(定理 3.3)，与已知矛盾. 因此，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

【证法 2】 考查方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_4$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$. 又因 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，故增广矩阵的秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\geqslant 3$. 于是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组无解，因此，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

【例 3.18】 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，但 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出. 判断

(1)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出?为什么?

(2)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出?为什么?

【解法一】 (1)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出.

因为 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，故可设

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+l_m\boldsymbol{\alpha}_m. \tag{1}$$

此时必有 $l_m\neq 0$，否则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出与已知矛盾. 那么

$$\boldsymbol{\alpha}_m=\frac{1}{l_m}(\boldsymbol{\beta}-l_1\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-l_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}),$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出.

如果 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出，可设

$$\boldsymbol{\alpha}_m=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}. \tag{2}$$

将(2)代入(1)，整理得

$$\boldsymbol{\beta}=(l_1+l_mk_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(l_2+l_mk_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(l_{m-1}+l_mk_{m-1})\boldsymbol{\alpha}_{m-1}.$$

说明 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出，与已知矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出.

【解法二】 据已知有

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)\overset{(1)}{=\!=}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}),$$

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1\overset{(2)}{=\!=}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}),$$

考察

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_m, \tag{*}$$

$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)&\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1\\&\overset{(2)}{=\!=}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta})\\&\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})\\&\overset{(1)}{=\!=}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m),\end{aligned}$$

于是 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1})+1=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$，即方程组(*)无解，故 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表出.

由于 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_m)$，故 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出.

学习札记：

【评注】 希望很好地体会和总结由例 3.17 和例 3.18 给出的面对抽象的向量组讨论线性表出时，所用到的一些思想方法和技巧.

练习 (1)(2010，$\frac{2}{3}$) 设向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出. 下列命题正确的是

(A) 若向量组 Ⅰ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

(B) 若向量组 Ⅰ 线性相关，则 $r>s$.

(C) 若向量组 Ⅱ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

(D) 若向量组 Ⅱ 线性相关，则 $r>s$. [　　]

(2)(2013，$\frac{1}{2}\frac{}{3}$) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶矩阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则

(A) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量等价.

(B) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量等价.

(C) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量等价.

(D) 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量等价. [　　]

学习札记：

向量组的秩

【例 3.19】 如果向量组(Ⅰ)：$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 与(Ⅱ)：$\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jt}$ 都是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组，证明 $r=t$.

【证】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组，所以 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir},\boldsymbol{\alpha}_{j_k}(k=1,2,\cdots,t)$ 线性相关. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_{jk}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 线性表出，从而向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表出. 又因向量组(Ⅱ)是极大线性无关组，是线性无关的，所以 $t\leqslant r$.(定理 3.5)

同理 $r\leqslant t$，故 $r=t$.

【评注】 本题告诉我们向量组的极大线性无关组往往是不唯一的，其成员可以不一样，但极大线性无关组中向量的个数是一样的，由此引出向量组秩的概念. 向量组的秩为 r 就是指该向量组的极大线性无关组有 r 个向量.

练习 证明定理 3.6：如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

学习札记：

【例 3.20】 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,3,-5,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[-2,-6,10,a]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[4,1,6,a+10]^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组是_____.

【分析】

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\1&3&-6&1\\1&-5&10&6\\3&-1&a&a+10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&2&-4&-3\\0&-6&12&2\\0&-4&a+6&a-2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&4\\0&2&-4&-3\\0&0&0&-7\\0&0&a-2&a-8\end{bmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)<4\Leftrightarrow a=2$. 此时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，极大线性无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

【例 3.21】 $(2006,\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix})$ 设 4 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1+a,1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,2+a,2,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,3,3+a,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[4,4,4,4+a]^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关？当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表出.

【解】 记 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{vmatrix}=(a+10)a^3.$$

那么当 $a=0$ 或 $a=-10$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

当 $a=0$ 时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1$.

当 $a=-10$ 时. 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\10&-10&0&0\\10&0&-10&0\\10&0&0&-10\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}-9&2&3&4\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$$

学习札记：

$=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]$.

易知 $\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4$，故 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组且 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$.

【评注】 本题也可直接对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2+a & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3+a & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4+a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ -a & a & 0 & 0\\ -a & 0 & a & 0\\ -a & 0 & 0 & a\end{bmatrix},$$

然后由对 $a=0,a\neq 0$ 分别讨论，请读者完成.

【例 3.22】 已知向量组（Ⅰ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与（Ⅱ）：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 有相同的秩，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

【证】 由于向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）有相同的秩，因此它们极大线性无关组所含向量个数相同. 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 是向量组（Ⅰ）的极大线性无关组，那么 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 也是向量组（Ⅱ）中的 r 个线性无关的向量. 又因 $r(\text{Ⅱ})=r(\text{Ⅰ})=r$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 也是向量组（Ⅱ）的极大线性无关组. 因此，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 线性表出，也就有 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

【例 3.23】 设向量组（Ⅰ）可由向量组（Ⅱ）线性表出，且秩 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$，证明向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价.

【分析】 要证向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，也就是要证（Ⅰ）与（Ⅱ）可以互相线性表出，现已知（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出，故只需证（Ⅱ）可由（Ⅰ）线性表出，出发点就是秩 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$.

【证】 设秩 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})=r$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 分别是向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）的极大线性无关组. 由于（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出，那么

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=r.$$

又因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的极大线性无关组，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，进而向量组（Ⅱ）可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，也就是（Ⅱ）可由（Ⅰ）线性表出. 又已知（Ⅰ）可由（Ⅱ）线性表出，所以（Ⅰ）与（Ⅱ）等价.

【评注】 注意，若向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，则秩 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$. 但 $r(\text{Ⅰ})=r(\text{Ⅱ})$ 时，向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）不一定等价. 请思考下例：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\text{与}\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

学习札记：

矩阵的秩

【例 3.24】 求 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix}$ 的秩.

【解】 方法一:经初等变换矩阵的秩不变

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1-a & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-a & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} a+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{bmatrix}.$$

若 $a\neq 1$ 且 $a\neq 1-n$,则 $r(\boldsymbol{A})=n$.

若 $a=1$,则 $r(\boldsymbol{A})=1$.

若 $a=1-n$,则 $r(\boldsymbol{A})=n-1$.

方法二:用行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}=(a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

若 $a\neq 1$ 且 $a\neq 1-n$,则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,故 $r(\boldsymbol{A})=n$.

若 $a=1$,易见 $r(\boldsymbol{A})=1$.

若 $a=1-n$,知 $n-1$ 阶子式

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}=(a+n-2)(a-1)^{n-2}\neq 0,\ |\boldsymbol{A}|=0,$$

学习札记：

故 $r(\boldsymbol{A})=n-1$.

方法三:用相似见例 5.30.

【例 3.25】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&4\\6&t&2\\4&6&3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}[2,3,4]$,若秩 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB})=2$,则 $t=$ _____.

【分析】 由于 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})]$,又

$$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}[2,3,4]=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}2&3&4\\6&9&12\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&4\\6&10&12\\0&0&1\end{bmatrix}$$

是可逆矩阵,故 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{A})=2$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换,有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&3&4\\6&t&2\\4&6&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&3&4\\0&t-9&-10\\0&0&-5\end{bmatrix},$$

那么,$r(\boldsymbol{A})=2\Leftrightarrow t=9$.

【例 3.26】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,证明秩

$$r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})).$$

【证法一】 对于齐次方程组

$$(\text{Ⅰ})\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}\text{ 与 }(\text{Ⅱ})\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0},$$

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组(Ⅱ)的任一个解,则由

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B\alpha})=\boldsymbol{A0}=\boldsymbol{0}$$

知 $\boldsymbol{\alpha}$ 是方程组(Ⅰ)的解.因此方程组(Ⅱ)的解集合是方程组(Ⅰ)的解集合的子集合.又因(Ⅰ)的解向量的秩为 $s-r(\boldsymbol{AB})$,(Ⅱ)的解向量的秩为 $s-r(\boldsymbol{B})$,故有

$$s-r(\boldsymbol{B})\leqslant s-r(\boldsymbol{AB}),$$

即 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$.

另一方面,$r(\boldsymbol{AB})=r((\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\leqslant r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})$.

命题得证.

【证法二】 记 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,并对 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 按列分块,有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1s}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2s}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{ns}\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s],$$

说明 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量 $\boldsymbol{\gamma}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表

学习札记：

出，因此据定理 3.6 与 3.7 有

$$r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_s) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n) = r(\boldsymbol{A}).$$

类似地，对 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 分别按行分块，有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\delta}_m \end{bmatrix},$$

说明 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量 $\boldsymbol{\delta}_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出，因此

$$r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \cdots, \boldsymbol{\delta}_m) \leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n) = r(\boldsymbol{B}).$$

【例 3.27】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n \times s$ 矩阵，若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，证明

$$r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n.$$

【证】 对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块，记 $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s]$，则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s] = [\boldsymbol{A\beta}_1, \boldsymbol{A\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{A\beta}_s] = [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}],$$

于是 $\boldsymbol{A\beta}_j = \boldsymbol{0} (j = 1, 2, \cdots, s)$，即 $\boldsymbol{B}$ 的列向量均是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解. 由于方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解向量的秩为 $n - r(\boldsymbol{A})$，所以

$$r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) \leqslant n - r(\boldsymbol{A}).$$

又秩 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s) = r(\boldsymbol{B})$，从而有 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

【评注】 关于 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，应当有两个重要的思路：

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解；

(2) 秩 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

【例 3.28】 (2008,1) 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 3 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置.

(1) 证明秩 $r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2$；

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $r(\boldsymbol{A}) < 2$.

【证】 (1) 由于 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 均是列向量，故 $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 3 阶矩阵，且有 $r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha}) \leqslant 1$，$r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\beta}) \leqslant 1$，从而

$$r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) + r(\boldsymbol{\beta\beta}^{\mathrm{T}}) \leqslant 2.$$

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，不妨设 $\boldsymbol{\beta} = k\boldsymbol{\alpha}$，则

$$r(\boldsymbol{A}) = r[\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}} + (k\boldsymbol{\alpha})(k\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}] = r[(1 + k^2)\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}] = r(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}) \leqslant 1 < 2.$$

【例 3.29】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，若 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

【证】 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$，则由

学习札记：

$$A^2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2&a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23}&a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}+a_{13}a_{33}\\a_{12}a_{11}+a_{22}a_{12}+a_{23}a_{13}&a_{12}^2+a_{22}^2+a_{23}^2&a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{23}a_{33}\\a_{13}a_{11}+a_{23}a_{12}+a_{33}a_{13}&a_{13}a_{12}+a_{23}a_{22}+a_{33}a_{23}&a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{O},$$

可知 $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=0$，即 $a_{11}=a_{12}=a_{13}=0$.

同理 $a_{12}=a_{22}=a_{13}=0$，$a_{13}=a_{23}=a_{33}=0$，故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

【评注】 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}\not\Rightarrow\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例如 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\neq\boldsymbol{O}$，有 $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$.

但当 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵时，由 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$ 可推断 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$. 本题证明用的是元素法，你能否用相似对角化来证明本题？

【例 3.30】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,9,9,9]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,0,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,0,0,1]^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个解，证明 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$.

【证】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,9,9,9]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,9,9,8]^{\mathrm{T}}$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解，所以 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$. 又因 $n=4$，故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，说明 $\boldsymbol{A}$ 中 3 阶子式全为 0，因而伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$.

Schmidt 正交化

如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2,$$

那么 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交，称为正交向量组. 将其单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 这一过程称为 Schmidt 正交化.

例如 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，则有

学习札记：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}-\frac{3}{30}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5\\10\\-5\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},$$

将其单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

向量空间*

定义 3.7 全体 n 维向量连同向量的加法和数乘运算合称为 n 维向量空间.

定义 3.8 设 W 是 n 维向量的非空集合，如果满足

(1) $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in W$，必有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$；

(2) $\forall\boldsymbol{\alpha}\in W$ 及任一实数 k，必有 $k\boldsymbol{\alpha}\in W$，

则称 W 是 n 维向量空间的子空间.

定义 3.9 如果向量空间 V 中的 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 满足

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；

(2) V 中任意向量 $\boldsymbol{\beta}$ 均可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表出，即

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{\beta},$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量空间 V 的一个基底(或基). 基中所含向量的个数 m 称为向量空间 V 的维数，记作 $\dim V=m$，并称 V 是 m 维向量空间. 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 的表示系数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 称为向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 下的坐标.

定义 3.10 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是向量空间的一组基，如果它们满足

$$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j,\end{cases}$$

则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为规范正交基.

---

* 注：本节仅数学一要求

学习札记：

设齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量的集合为 $\boldsymbol{W}$，由解的性质知：

若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\alpha}$ 仍是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{W}$ 是 n 维向量空间的子空间，通常称为**解空间**.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&-1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$，则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

$$\boldsymbol{\eta}_1=[0,0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$$

是解空间的基，解空间的维数是 $n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$.

本题中，$\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2$ 已经正交，将其单位化，

$$\boldsymbol{\gamma}_1=[0,0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}[2,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$$

就是解空间的规范正交基.

定义 3.11 在 n 维向量空间给定两组基

(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$；　　(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$，

若

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_1&=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\\boldsymbol{\beta}_2&=c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\\boldsymbol{\beta}_n&=c_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n,\end{aligned}\tag{3.1}$$

即

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{C},\tag{3.2}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{n1}&c_{n2}&\cdots&c_{nn}\end{bmatrix},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的**过渡矩阵**.

【例 3.31】 (2003,1) 从 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ 的过渡矩阵为_____.

【分析】 据已知，有 $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\\\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\end{cases}$ 那么，按(3.1)知，过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}.$$

或由(3.2)有 $[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]^{-1}[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$，所以

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}.$$

学习札记：

定理 3.8 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 n 维向量空间的两个基底，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵 C 是可逆矩阵.

定理 3.9 如果向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的坐标为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在基底 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的坐标为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，则坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad 或 \quad \boldsymbol{x} = C\boldsymbol{y},$$

其中 n 阶矩阵 C 是由基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 到基底 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的过渡矩阵.

定理 3.10 若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 非零且两两正交，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

定理 3.11 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是规范正交基，设

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n] = [\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n]C,$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是规范正交基的充分必要条件是 C 为正交矩阵.

【例 3.32】 (1987,1) 已知三维向量空间的一组基底为 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1]$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,1]$，则向量 $\boldsymbol{u}=[2,0,0]$ 在上述基底的坐标是_____.

【分析】 若 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{u}$，则 $[x_1,x_2,x_3]$ 称为向量 $\boldsymbol{u}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标，按分量写出，有

$$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\quad = 2, \\ x_1 \qquad\quad + x_3 = 0, \\ \qquad\quad x_2+x_3 = 0, \end{cases}$$

解此方程组，有 $x_1=1,x_2=1,x_3=-1$.

因此，向量 $\boldsymbol{u}$ 在基底 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的坐标是 $[1,1,-1]$.

【例 3.33】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,3,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,7,1]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=[2,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[5,2,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=[1,3,4]^{\mathrm{T}}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 的两组基，那么，在这两组基下有相同坐标的向量是_____.

【分析】 设向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 在这两组基下有相同的坐标 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{\gamma}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+x_3\boldsymbol{\beta}_3.$$

把坐标代入，并整理得

$$\begin{cases} -x_1-3x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+4x_3=0, \\ \qquad\quad x_2-3x_3=0, \end{cases}$$

解出 $x_1=-7t,x_2=3t,x_3=t$，所以

$$\boldsymbol{\gamma}=-7t[1,2,1]^{\mathrm{T}}+3t[2,3,3]^{\mathrm{T}}+t[3,7,1]^{\mathrm{T}}=[2t,2t,3t]^{\mathrm{T}}.$$

学习札记：

【例 3.34】 (2010,1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,-1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,1,a]^{\mathrm{T}}$，若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 生成的向量空间维数是 2，则 $a=$ _____.

【分析】 按定义，由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 所生成的向量空间维数是 2 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$. 对 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 作初等变换，有

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $a=6$.

学习札记：

四、练习题精选

1. 填空题

(1) 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,4,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,7,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,a]^{\mathrm{T}}$ 可以表示任一个 3 维向量，则 a 的取值为_____.

(2) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,3,2,a]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,7,a,3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,a,5,-5]^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $a=$_____.

(3) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,3,6,2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,2,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-1,a,-2]^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2，则 $a=$_____.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为_____.

(5) 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$，则秩 $r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})=$_____.

(6) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\2&a&3&4\\3&1&5&7\end{bmatrix}$，若 $r(\boldsymbol{A})=3$，则 a,b 满足条件_____.

2. 选择题

(1) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则线性无关的向量组是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,5\boldsymbol{\alpha}_1+8\boldsymbol{\alpha}_2$. [ ]

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\6\\a_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\a_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\7\\a_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\a_4\end{bmatrix}$，

学习札记：

其中 a_1,a_2,a_3,a_4 为任意实数，则

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性相关.　　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性相关.　　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 必线性无关.

[　　]

(3) 若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r\ (s>r)$，则

(A) 向量组中任意 $r-1$ 个向量都线性无关.

(B) 向量组中任意 r 个向量都线性无关.

(C) 向量组中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

(D) 向量组中任意 r 个向量都线性相关.　　[　　]

(4) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $s-1$ 个向量都线性无关.

(B) 存在向量 $\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_{s+1}$ 仍线性无关.

(C) $\exists$不全为 0 的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$.

(D) $\forall$不全为 0 的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 恒有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$.

[　　]

3. 解答题

(1) 已知 n 维向量组(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与(Ⅱ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 有相同的秩，证明 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

(2) 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 非零且两两正交，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是 3 维列向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，证明存在非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出.

当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-3\\2\\-5\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ 时，求出所有的向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

答案与提示

1. (1)$a\neq1$.　(2)$a=-1$.　(3)$a=-2$.　(4)2.　(5)1.　(6)$a\neq1,b=2$ 或 $a=1,b\neq2$.

【提示】 (1)n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可以表示任一个 n 维向量的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq0$.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，由定理 3.2 知齐次方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$ 有非零解，对系数矩阵作初等行变换，有

学习札记：

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&7&a\\2&a&5\\a&3&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&a\\0&0&5+4a-a^2\\0&0&2a^2-3a-5\end{bmatrix}.$$

由于 $5+4a-a^2=(5-a)(1+a)$，$2a^2-3a-5=(2a-5)(a+1)$，可见仅当 $a=-1$ 时，上述两个数才同时为零，否则至少有一个数不零，从而

$$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3 \text{ 线性相关} \Leftrightarrow \text{秩 } r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3 \Leftrightarrow a=-1.$$

(3) 经初等变换向量组的秩不变，由

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&2&1\\3&1&-1\\6&2&a\\2&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&5&4\\0&0&a+2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

可见 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2\Leftrightarrow a+2=0$.

(4) 由于 $[\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3]=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，注意 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$ 可逆.

(5) $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，又 $\boldsymbol{A}$ 可逆，可知

$$r(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}).$$

(6) 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等变换，将它化为阶梯形矩阵，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\2&a&3&4\\3&1&5&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&b\\0&0&a-1&ab-2b+2\\0&0&0&4-2b\end{bmatrix}.$$

$r(\boldsymbol{A})=3\Rightarrow a\neq 1,b=2$ 或 $a=1,b\neq 2$.

2. (1)(B).　(2)(B).　(3)(C).　(4)(D).

【提示】 (1) 由于 (A) $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，

而　(C) $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0}$，

利用观察法，通过简单地加加减减我们知 (A)、(C) 均线性相关，可排除.

至于 (D)，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}_3=5\boldsymbol{\alpha}_1+8\boldsymbol{\alpha}_2$ 即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，亦即多数向量可以由少数向量线性表出，故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 必线性相关（定理 3.5）.

(2) 考察 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中的前三个分量所构成的向量，由

$$\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-1&0\\6&2&7\end{vmatrix}=5\neq 0,$$

知 $[1,0,6]^{\mathrm{T}},[1,-1,2]^{\mathrm{T}},[2,0,7]^{\mathrm{T}}$ 线性无关，从而延伸组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

学习札记：

因为 $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 5a_4$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 既可能线性相关也可能线性无关，可知(C)、(D) 均不正确.

(3) 考察 $[1,0,0]^T,[2,0,0]^T,[0,1,0]^T,[0,0,1]^T$ 可知(A)、(B)、(D) 均错误.

(4)(A)、(C) 都是必要条件，(B) 是充分条件.

3.(1) 考察方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{\beta}$，由于秩

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s) = r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}),$$

即 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}})$，从而方程组有解，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性求出.

或者，设 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2}\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组，由于 $r(\mathrm{I}) = r(\mathrm{II})$，可知 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 在(Ⅱ)中仍是(Ⅱ)的极大线性无关组，那么 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir},\boldsymbol{\beta}$ 必线性相关，从而 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 线性表出，故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

(2) 设
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$
因为 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_j(i \neq j)$ 两两正交，有 $\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j = 0$，用 $\boldsymbol{\alpha}_1^T$ 左乘(1)式，得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 = 0.$$

注意 $\boldsymbol{\alpha}_1^T\boldsymbol{\alpha}_1 = \|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2 > 0$.

(3)4 个 3 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 必线性相关，故有不全为 0 的 k_1,k_2,l_1,l_2 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + l_1\boldsymbol{\beta}_1 + l_2\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{0}.$$

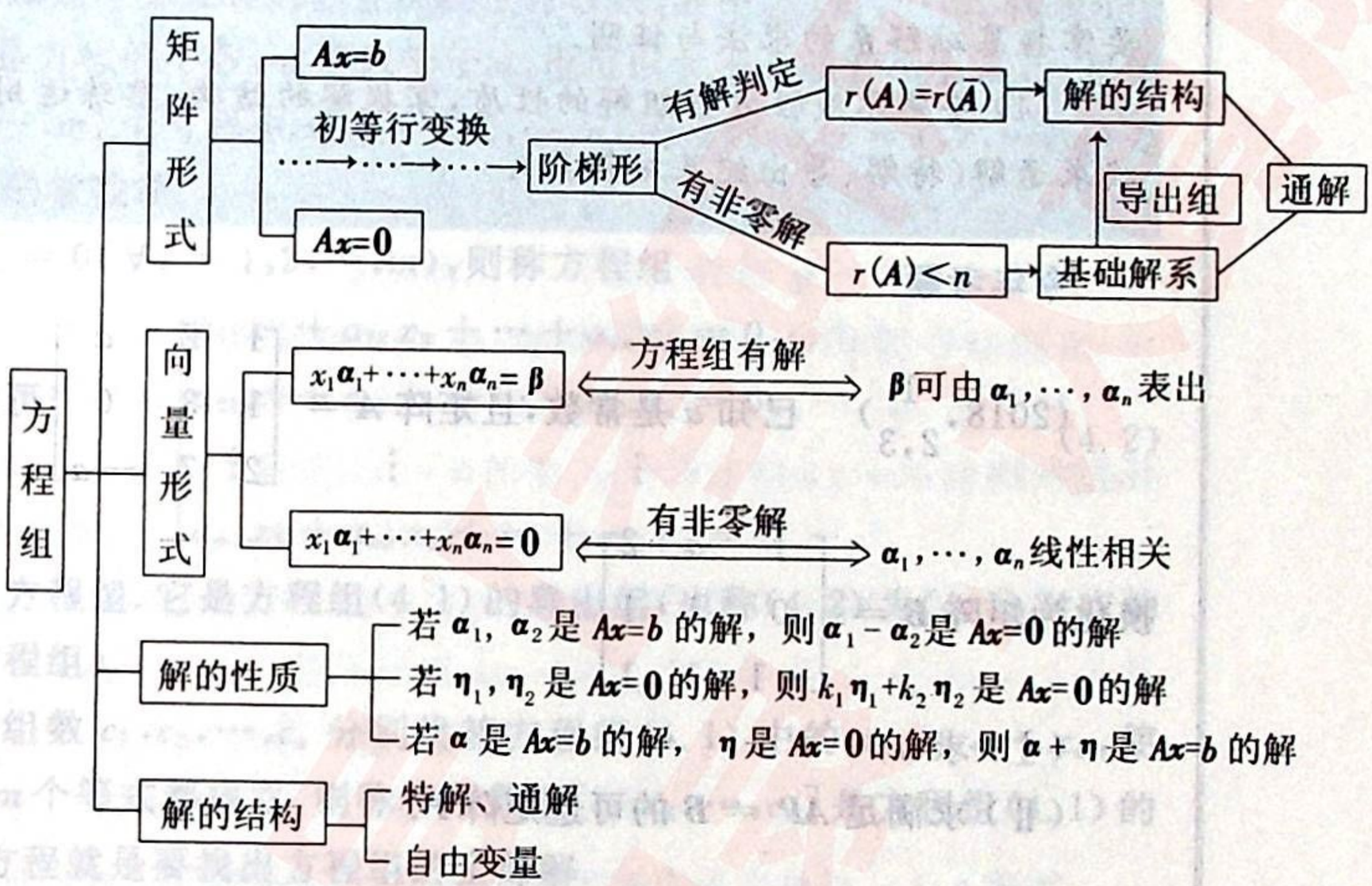
注意 k_1,k_2 必不全为 0(想清楚为什么?)，取 $\boldsymbol{\gamma} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = -l_1\boldsymbol{\beta}_1 - l_2\boldsymbol{\beta}_2$.

解方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + y_1\boldsymbol{\beta}_1 + y_2\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{0}$，求其通解可知

$$\boldsymbol{\gamma} = k[0,1,1]^T, k \text{ 为任意非零常数}.$$

第四章　线性方程组——重点，别马虎大意！

一、知识结构网络图



如有方程组就加减消元、讨论参数，求解.

如没有方程组大概需求秩，用解的结构分析推理来求解.

学习札记：

【评注】 线性方程组在代数中地位重要，是考研热点之一. 这一部分解题的思路比较清晰，但往届考生中有些同学忽视基本运算，对概念的理解上亦有偏差，因此出错率较高，常犯低级错误.

(1) 理解线性方程组解的概念.

(2) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能有解(唯一解或无穷多解) 亦可能无解，要理解方程组有解的充要条件是秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(3) n 元齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有零解，问题是除去零解之外是否还有其它的解(即非零解)?判断方法是检查 $r(\boldsymbol{A})<n$?特殊情况可检查行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$?

要理解基础解系这一概念，其实它就是解向量的极大线性无关组，要掌握基础解系的求法与证明.

(4) 要熟悉线性方程组解的性质，掌握解的结构，熟练运用初等行变换求通解(特解、导出组基础解系).

今年考题

(2018, $\begin{matrix}1\\2,3\end{matrix}$) 已知 a 是常数，且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

(Ⅰ) 求 a;

(Ⅱ) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

称为n个未知数m个方程的**非齐次线性方程组**，其中$x_1, x_2, \cdots, x_n$代表n个未知量，m是方程的个数，m可以等于n，也可以大于n或者小于n，a_{ij}是第$i(i=1,2,\cdots,m)$个方程中$x_j(j=1,2,\cdots,n)$的系数，$b_i(i=1,2,\cdots,m)$是第i个方程的常数项.

如果$b_i = 0(\forall i = 1,2,\cdots,m)$，则称方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

为**齐次线性方程组**. 它是方程组(4.1)的**导出组**(也称(4.2)为(4.1)对应的齐次线性方程组).

若将一组数$c_1, c_2, \cdots, c_n$分别代替方程组(4.1)中的$x_1, x_2, \cdots, x_n$，使(4.1)式中m个等式都成立，则称有序数组$[c_1, c_2, \cdots, c_n]$是方程组(4.1)的**一组解**. 解方程就是要找出方程组的全部解.

线性方程组(4.1)的全体系数及常数项所构成的矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

称为方程组(4.1)的**增广矩阵**，而由全体系数组成的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为方程组(4.1)的**系数矩阵**.

方程组(4.1)可以用矩阵表示为：$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，其中$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_m]^{\mathrm{T}}$.

如果两个方程组有相同的解集合，则称它们是**同解方程组**.

学习札记：

定义 4.1 下列三种变换称为线性方程组的初等变换.

(1) 用一个非零常数乘方程的两边；

(2) 把某方程的 k 倍加到另一方程上；

(3) 互换两个方程的位置.

线性方程组经初等变换化为阶梯形方程组后，每个方程中的第一个未知量通常称为**主变量**，其余的未知量称为**自由变量**.

例如，对增广矩阵作初等行变换，化为

$$\overline{A} \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ & 5 & 6 & 0 & 1 & 9 \\ & & & & 1 & 2 \end{array}\right],$$

则 x_1, x_2, x_5 为主变量，x_3, x_4 为自由变量.

定义 4.2 向量组 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 称为齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的**基础解系**，如果

(1) $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解；

(2) $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 线性无关；

(3) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的任一解都可由 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 线性表出.

如果 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，那么，对任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_t$，

$$c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + c_t\boldsymbol{\eta}_t$$

是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的通解.

主要定理

定理 4.1 线性方程组的初等变换把线性方程组变成与它同解的方程组.

定理 4.2 设 n 元线性方程组为(4.1)，对它的增广矩阵施行高斯消元法，得到阶梯形矩阵

$$\overline{A} \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccccc:c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

如果 $d_{r+1} \neq 0$，方程组(4.1)无解；如果 $d_{r+1} = 0$，方程组有解，而且当 $r = n$ 时有唯一解，当 $r < n$ 时有无穷多解.

定理 4.3 齐次方程组(4.2)有非零解

$\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) < n$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关.

学习札记：

推论 1　当 $m < n$（即方程的个数 < 未知数的个数）时，齐次线性方程组(4.2) 必有非零解.

推论 2　当 $m = n$ 时，齐次线性方程组(4.2) 有非零解的充分必要条件是行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$.

定理 4.4　设齐次线性方程组(4.2) 系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A}) = r < n$，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系由 $n - r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关的解向量所构成.

定理 4.5　（有解判定定理）非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是其系数矩阵和增广矩阵的秩相等，即 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = n$，则方程组有惟一解；

若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) < n$，则方程组有无穷多解；

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) + 1 = r(\overline{\boldsymbol{A}})$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表出.

定理 4.6　（解的性质）

(1) 如果 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的两个解，那么其线性组合仍是该齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的两个解，则 $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(3) 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\eta}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解.

定理 4.7　（解的结构）　对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$，若 $r(\boldsymbol{A}) = r(\overline{\boldsymbol{A}}) = r$，且已知 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\zeta}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的某个已知解，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为

$\boldsymbol{\zeta}_0 + c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + c_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}$，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$ 为任意常数.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

基础解系

【例 4.1】 设 $A=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\2&1&7&4&3\\-1&2&-1&3&0\end{bmatrix}$，则 $Ax=0$ 的基础解系中所含解向量的个数是_____.

【分析】 由于 $Ax=0$ 的基础解系由 $n-r(A)$ 个解向量所构成，故应计算秩 $r(A)$.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\2&1&7&4&3\\-1&2&-1&3&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&2&-1\\0&2&2&4&2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&4\end{bmatrix},$$

由于 $r(A)=3$，故

$$n-r(A)=5-3=2,$$

从而基础解系中所含解向量个数为 2.

练习 (2004,3) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq O$，若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系

(A) 不存在. (B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量. (D) 含有三个线性无关的解向量.

学习札记：

【例 4.2】　齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+2x_4+5x_5=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+3x_4+\ \ x_5=0, \\ 3x_1+4x_2+3x_3+4x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

的通解_____

【分析】　对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行最简形，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&2&5\\2&2&1&3&1\\3&4&3&4&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&2&5\\0&-2&-5&-1&-9\\0&-2&-6&-2&-12\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&2&5\\0&2&5&1&9\\0&0&-1&-1&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-1&-4\\0&2&0&-4&-6\\0&0&1&1&3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&3&2\\0&1&0&-2&-3\\0&0&1&1&3\end{bmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad +3x_4+2x_5=0, \\ \qquad x_2 \quad -2x_4-3x_5=0, \\ \qquad\qquad x_3+x_4+3x_5=0. \end{cases}$$

令 $x_4=k_1,x_5=k_2$ 得 $x_3=-k_1-3k_2,x_2=2k_1+3k_2,x_1=-3k_1-2k_2$，所以方程组通解为

$k_1(-3,2,-1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-2,3,-3,0,1)^{\mathrm{T}},k_1,k_2$ 为任意实数.

【例 4.3】　齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\quad +3x_4-x_5=0, \\ \qquad 2x_2+x_3+2x_4+x_5=0, \\ \qquad\qquad\qquad x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

的基础解系是_____.

【分析】　系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&3&-1\\0&2&1&2&1\\0&0&0&1&3\end{bmatrix}$ 已是阶梯形，由秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，知 $n-r(\boldsymbol{A})=5-3=2$.

令 $x_3=1,x_5=0$，得 $x_4=0,x_2=-\dfrac{1}{2},x_1=\dfrac{1}{2}$.

令 $x_3=0,x_5=1$，得 $x_4=-3,x_2=\dfrac{5}{2},x_1=\dfrac{15}{2}$.

故基础解系是：$\boldsymbol{\eta}_1=[\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0,0]^{\mathrm{T}}$，　$\boldsymbol{\eta}_2=[\dfrac{15}{2},\dfrac{5}{2},0,-3,1]^{\mathrm{T}}$.

学习札记：

【评注】 如何确定自由变量并赋值？

(1) 对系数矩阵作初等行变换化其为阶梯形.

(2) 由秩 $r(\boldsymbol{A})$ 确定自由变量的个数 $n-r(\boldsymbol{A})$.

(3) 找出一个秩为 $r(\boldsymbol{A})$ 的矩阵，则其余的 $n-r(\boldsymbol{A})$ 列对应的就是自由变量.

(4) 每次给一个自由变量赋值为1，其余的自由变量赋值为0(注意共需赋值 $n-r(\boldsymbol{A})$ 次).

对阶梯形方程组由下往上依次求解，就可得到方程组的解.

练习 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是4维非零列向量，记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $(1,0,-2,0)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

[　　]

【例 4.4】 (2004,1) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \vdots\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}\quad(n\geqslant 2),$$

试问 a 为何值时，该方程组有非零解，并求其通解.

【解法一】 对系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}$$

学习札记：

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ -3a & 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

(1) 若 $a=0$，秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，方程组有非零解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0.$$

由此得基础解系为

$\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,0,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$，

所以方程组的通解是

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}\text{ 为任意常数}).$$

(2) 若 $a\neq 0$，对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 继续作初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}\rightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a+\frac{1}{2}n(n+1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

故当 $a=-\frac{1}{2}n(n+1)$ 时，秩 $r(\boldsymbol{A})=n-1<n$，方程组也有非零解. 其同解方程组为

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}}$，

于是方程组的通解为 $k\boldsymbol{\eta}$，k 为任意常数.

【解法二】 由于系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix}=a^{n-1}\left[a+\frac{1}{2}(n+1)n\right],$$

故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|=0$

$\Leftrightarrow a=0$ 或 $a=-\frac{1}{2}(n+1)n.$

(1) 若 $a=0$，对系数矩阵作初等行变换，有

学习札记：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0.$$

由此得基础解系为

$\boldsymbol{\eta}_1=[-1,1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=[-1,0,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-1}=[-1,0,0,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$，

此时方程组的通解为

$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

(2) 若 $a=-\frac{1}{2}(n+1)n$，对系数矩阵作初等行变换，有

$$A=\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\2&2+a&2&\cdots&2\\3&3&3+a&\cdots&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n&n&\cdots&n+a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2a&a&0&\cdots&0\\-3a&0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-na&0&0&\cdots&a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1+a&1&1&\cdots&1\\-2&1&0&\cdots&0\\-3&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0\\-2&1&0&\cdots&0\\-3&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-n&0&0&\cdots&1\end{bmatrix},$$

故方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\-3x_1+x_3=0,\\\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\\-nx_1+x_n=0.\end{cases}$$

因为系数矩阵的秩为 $n-1$，可求出基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}=[1,2,\cdots,n]^{\mathrm{T}},$$

此时方程组的通解为

$$k\boldsymbol{\eta},k\text{ 为任意常数}.$$

练习　(2005, $\frac{1}{2}$) 已知3阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第1行是 $[a,b,c]$，a,b,c 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$（$k$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

学习札记：

解方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$

(1) 要会解方程组，会处理参数.

【例 4.5】　解方程组

$$\begin{cases}2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1,\\x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1,\\4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1,\\2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1.\end{cases}$$

【解】　对增广矩阵作初等变换化为阶梯形，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccccc:c}2&-2&1&-1&1&1\\1&2&-1&1&-2&1\\4&-10&5&-5&7&1\\2&-14&7&-7&11&-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&-1&1&-2&1\\2&-2&1&-1&1&1\\4&-10&5&-5&7&1\\2&-14&7&-7&11&-1\end{array}\right]$$

学习札记：

$$\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&-1&1&-2&1\\0&-6&3&-3&5&-1\\0&-18&9&-9&15&-3\\0&-18&9&-9&15&-3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&-1&1&-2&1\\0&6&-3&3&-5&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

由于 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组有解，其同解的线性方程组是

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1,\\ 6x_2-3x_3+3x_4-5x_5=1,\end{cases}$$

移项，得
$$\begin{cases}x_1+2x_2=1+x_3-x_4+2x_5,\\ 6x_2=1+3x_3-3x_4+5x_5.\end{cases}$$

(1) 先求特解 $\boldsymbol{\alpha}$，只要取 $x_3=x_4=x_5=0$ 即可，于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{2}{3},\frac{1}{6},0,0,0\right]^{\mathrm{T}}.$$

(2) 再求导出组的基础解系(需把方程组的常数项换成零)，得

$$\begin{cases}x_1+2x_2=x_3-x_4+2x_5,\\ 6x_2=3x_3-3x_4+5x_5,\end{cases}$$

此时 $n-r(\boldsymbol{A})=5-2=3$，$x_3,x_4,x_5$ 是自由变量.

令 $x_3=1,x_4=0,x_5=0$，得 $\boldsymbol{\eta}_1=\left[0,\frac{1}{2},1,0,0\right]^{\mathrm{T}}$.

令 $x_3=0,x_4=1,x_5=0$，得 $\boldsymbol{\eta}_2=\left[0,-\frac{1}{2},0,1,0\right]^{\mathrm{T}}$.

令 $x_3=0,x_4=0,x_5=1$，得 $\boldsymbol{\eta}_3=\left[\frac{1}{3},\frac{5}{6},0,0,1\right]^{\mathrm{T}}$.

故方程组的通解是 $\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$ （k_1,k_2,k_3 为任意常数）.

【评注】 这是基础题，搞清楚非齐次线性方程组的求解方法：

(1) 对增广矩阵作初等行变换化为阶梯形矩阵；

(2) 求导出组的一个基础解系；

(3) 求方程组的一个特解(为简捷，可令自由变量全为 0)；

(4) 按解的结构写出通解.

注意，当方程组中含有参数时，分析讨论要严谨不要丢情况，此时的特解往往比较繁.

【例 4.6】 当 a 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1,\\ ax_2-3x_3=3,\\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在有解时求其所有解.

【解】 对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\1&3&a+1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\0&-1&a+2&1\end{array}\right]$$

学习札记：

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}-1 & -4 & 1 & 1\\ 0 & -1 & a+2 & 1\\ 0 & 0 & a^2+2a-3 & a+3\end{array}\right].$$

若 $a=1$，则 $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解.

若 $a=-3$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有无穷多解.

若 $a\neq 1$ 且 $a\neq -3$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有唯一解.

当 $a=-3$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

方程组通解是 $[3,-1,0]^{\mathrm{T}}+k[5,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -3$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 4 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -(a+2) & -1\\ 0 & 0 & a-1 & 1\end{array}\right],$$

得
$$x_3=\frac{1}{a-1},\quad x_2=\frac{3}{a-1},\quad x_1=\frac{a+10}{1-a},$$

方程组的唯一解是 $\left[\frac{a+10}{1-a},\frac{3}{a-1},\frac{1}{a-1}\right]^{\mathrm{T}}$.

【例 4.7】　已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2-2x_3+3x_4=0,\\ x_1-3x_2-5x_3+2x_4=-1,\\ x_1+x_2+ax_3+4x_4=1,\\ x_1+7x_2+10x_3+7x_4=b,\end{cases}$$

讨论参数 a,b 取何值时，方程组有解、无解；当有解时，试用其导出组的基础解系表示通解.

【解】　对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & -2 & 3 & 0\\ 1 & -3 & -5 & 2 & -1\\ 1 & 1 & a & 4 & 1\\ 1 & 7 & 10 & 7 & b\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-4\end{array}\right].$$

当 $b\neq 4$ 时，$r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组无解.

当 $b=4$ 时，$\forall a$，恒有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，方程组有解.

若 $a\neq 1$，有 $\overline{\boldsymbol{A}}\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & a-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，

学习札记：

$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有无穷多解，通解为

$$[\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0]^{\mathrm{T}}+k[-\frac{7}{2},-\frac{1}{2},0,1]^{\mathrm{T}},k\text{ 为任意常数.}$$

若 $a=1$，有 $\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&-1&-2&3&0\\0&2&3&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$，

$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，方程组有无穷多解，通解为

$[\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0]^{\mathrm{T}}+k_1[\frac{1}{2},-\frac{3}{2},1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-\frac{7}{2},-\frac{1}{2},0,1]^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

【例 4.8】（2004，4）设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1,\end{cases}$$

已知$[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$是该方程组的一个解. 试求

（Ⅰ）方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；

（Ⅱ）该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

【解】（Ⅰ）因为$[1,-1,1,-1]^{\mathrm{T}}$是方程组的一个解，将其代入方程的两端，立即有 $\lambda=\mu$.

对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}1&\lambda&\lambda&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+\lambda&4+\lambda&4&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2(2\lambda-1)&2\lambda-1&2\lambda-1\end{array}\right].$$

(1) 若 $\lambda=\frac{1}{2}$，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

由 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2$，$n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$，方程组有无穷多解，其通解为

$[-\frac{1}{2},1,0,0]^{\mathrm{T}}+k_1[1,-3,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-\frac{1}{2},-1,0,1]^{\mathrm{T}}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

(2) 若 $\lambda\neq\frac{1}{2}$，

学习札记：

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-2\lambda&1-\lambda&-\lambda\\0&1&3&1&1\\0&0&2&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right],$$

由 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3,n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$，方程组有无穷多解，其通解为

$[0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0]^{\mathrm{T}}+k[-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1]^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

(Ⅱ)(1) 若 $\lambda=\frac{1}{2}$，对于 $x_2=x_3$，由通解知

$$1+(-3k_1)+(-k_2)=0+k_1\Rightarrow k_2=1-4k_1,$$

故所求解为

$$[-1,0,0,1]^{\mathrm{T}}+k_1[3,1,1,-4]^{\mathrm{T}},k_1\text{ 为任意常数.}$$

(2) 若 $\lambda\neq\frac{1}{2}$，对于 $x_2=x_3$，由通解知

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k\Rightarrow k=1,$$

故所求解为

$$[0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0]^{\mathrm{T}}+[-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1]^{\mathrm{T}}=[-1,0,0,1]^{\mathrm{T}}.$$

【注】 根据题目的具体情况求解.

例 4.5，例 4.6 是化为阶梯形用代入来求解.

例 4.7，例 4.8 是化为行最简形直接写答案.

(2) 要会用解的结构、解的性质处理抽象的方程组.

【例 4.9】 4 元方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中，系数矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组的三个解，若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}$，则方程组通解为_____.

【分析】 由于 $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$，故方程组通解形式为 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\eta}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 可取为 $\boldsymbol{\alpha}_1$.

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则由 $\boldsymbol{A\alpha}_1=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{b}$ 知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 由

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=2\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1)=2\boldsymbol{b},$$

知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$，即 $[0,1,2,3]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以方程组的通解为 $[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+k[0,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

【例 4.10】 已知 $\boldsymbol{\xi}_1=[-9,1,2,11]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=[1,-5,13,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_3=[-7,-9,24,11]^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\begin{cases}a_1x_1+7x_2+a_3x_3+x_4=d_1,\\3x_1+b_2x_2+2x_3+2x_4=d_2,\\9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2\end{cases}$ 的解，则方程组的通解是_____.

学习札记：

【分析】 只有知道秩 $r(\boldsymbol{A})$，算出 $n-r(\boldsymbol{A})$ 就知解的结构. 因为矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & 7 & a_3 & 1 \\ 3 & b_2 & 2 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

中有 2 阶非零子式，例如 $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$，故秩 $r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2$. 又因

$$\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2=[-10,6,-11,11]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_3=[-2,10,-22,0]^{\mathrm{T}}$$

是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解，而有

$$n-r(\boldsymbol{A}) \geqslant 2，即\ r(\boldsymbol{A}) \leqslant 2.$$

从而得秩 $r(\boldsymbol{A})=2$.

所以方程组的通解为 $\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} -10 \\ 6 \\ -11 \\ 11 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

【评注】 本题亦可利用解的概念先求出参数 a,b,c,d，然后再解方程组求解，但计算繁琐，不好.

【例 4.11】 $(2002,\frac{1}{2})$ 已知 4 阶方程 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

【分析】 本题没有给出系数矩阵而又需要求出通解，通常加减消元之路堵塞，应当抽象地用解的结构与性质来分析探讨.

【解法一】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，又 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，从而秩

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3,$$

那么 $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$，即

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $[1,-2,1,0]^{\mathrm{T}}$.

再由

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

学习札记：

知$[1,1,1,1]^T$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的解，故方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$[1,1,1,1]^T+k[1,-2,1,0]^T,k\text{为任意常数}.$$

【解法二】（构造与$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$同解的方程组）

设$\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的任一解，则

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

即
$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4.$$

将$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$代入上式，整理得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，故必有

$$\begin{cases}2x_1+x_2=3,\\x_1+x_3=0,\\x_4=1,\end{cases}$$

解此方程组即得到$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解为

$$[1,1,1,1]^T+k[1,-2,1,0]^T,k\text{为任意常数}.$$

练习　(2017)　设3阶矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$有3个不同的特征值，且$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

（Ⅰ）证明$r(\boldsymbol{A})=2$；

（Ⅱ）若$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解.

学习札记：

(3) 有些题要求通过矩阵的运算构造出方程组再求解.

【例 4.12】 (2000,2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$. 求解方程 $2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}$.

【解】 由题设知，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\left[1,\frac{1}{2},0\right]=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\2&1&0\\1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left[1,\frac{1}{2},0\right]\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=2.$$

又 $\boldsymbol{A}^2=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=2\boldsymbol{A}$，于是 $\boldsymbol{A}^4=8\boldsymbol{A}$，代入原方程，整理有

$$8(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\gamma},$$

即
$$\begin{bmatrix}-1&\frac{1}{2}&0\\2&-1&0\\1&\frac{1}{2}&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

对增广矩阵作初等行变换，有

$$\left[\begin{array}{ccc:c}-1&\frac{1}{2}&0&0\\2&-1&0&0\\1&\frac{1}{2}&-2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

特解为 $\boldsymbol{\alpha}=\left[\frac{1}{2},1,0\right]^{\mathrm{T}}$，

基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$，

故方程组的通解为

$$\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\eta},k\text{ 为任意常数}.$$

【例 4.13】 $(2016,\frac{2}{3})$ 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}0\\1\\2a-2\end{bmatrix}$，且方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 求方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

【解】 (Ⅰ) 对 $(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换，有

学习札记：

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ a+1 & 1 & a+1 & 2a-2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1 & 1-2a & -1 \\ 0 & 0 & a(2-a) & a-2 \end{array}\right],$$

因方程组无解，故 $a=0$.

（Ⅱ）对于方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

对 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})$ 作初等行变换，有

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

得方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$(1,-2,0)^{\mathrm{T}}+k(0,-1,1)^{\mathrm{T}},k\text{ 为任意常数}.$$

【评注】 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 无解的必要条件：$|\boldsymbol{A}|=0$.

$$由\ |\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix}=a^2-2a=0,$$

然后代入判断可知 $a=0$ 时方程组无解.

有解判定、解的结构、性质

【例 4.14】 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 经初等行变换其增广矩阵化为

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ & a-3 & 2 & 6 & a-1 \\ & & a-2 & a & -2 \\ & & & -3 & a+1 \end{array}\right],$$

若方程组无解，则 $a=$

(A) -1.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　[　　]

【分析】 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=4$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，方程组必有唯一解，故(A)不正确. 注意此时第 4 个方程是 $-3x_4=0$，不要与 $0x_4=3$ 相混淆.

当 $a=1$ 时，仍有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，故(B)不正确.

学习札记：

当 $a=2$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 & 6 & 1 \\ & & 0 & 2 & -2 \\ & & & -3 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 & 6 & 1 \\ & & 0 & 1 & -1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<4$，方程组有无穷多解，故(C)不正确.

当 $a=3$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}} \to \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ & 0 & 2 & 6 & 2 \\ & & 1 & 3 & -2 \\ & & & -3 & 4 \end{array}\right],$$

可观察出二、三两个方程矛盾，方程组无解，故应选(D).

【例 4.15】 下列命题中正确的命题是

(A) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，那么 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解.

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有两个不同的解，那么 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解. [ ]

【分析】 (A) $\boldsymbol{A}$ 不一定是 n 阶矩阵，那么行列式可以不存在.

(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{A})=n$.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow$ 秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$.

由于 $r(\boldsymbol{A})=n \not\Rightarrow r(\overline{\boldsymbol{A}})=n$，故(B)不正确.

请考察

$$\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_1-x_2=0, \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1-x_2=2, \\ 2x_1+2x_2=3, \end{cases}$$

有 $r(\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}=3$.

(C) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$.

由于 $r(\boldsymbol{A})<n \not\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<n$，故(C)不正确.

例如 $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ 2x_1+2x_2=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ 2x_1+2x_2=3, \end{cases}$

虽然 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，但 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可以无解.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，则 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，从而 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有无穷多解，即(D)正确.

学习札记：

【例 4.16】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关.　　(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关.　　(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关. [　　]

【分析】 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 由于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}]$ 是 $m\times(n+1)$ 矩阵，按矩阵秩的概念与性质，有

$$r(\boldsymbol{A})\leqslant r(\overline{\boldsymbol{A}})\leqslant m.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则 $r(\boldsymbol{A})=m$，则必有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=m$，所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解，故(A) 是方程组有解的充分条件. 而(B)、(C)、(D) 均不能保证 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，希望你能想清楚，举出简单反例.

【例 4.17】 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵是 4×5 矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，则错误命题是

(A) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(B) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

(C) $\forall\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解.

(D) $\forall\boldsymbol{b}$，方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 必有唯一解. [　　]

【分析】 因为矩阵的秩 $r(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\boldsymbol{A}$ 的列秩，由于 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，得 $r(\boldsymbol{A})=4$.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 5×4 矩阵，而 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A})=4$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解. (A) 正确.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 5 阶矩阵，由于 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\leqslant r(\boldsymbol{A})=4<5$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解，(B) 正确.

$\boldsymbol{A}$ 是 4×5 阶矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关，那么其延伸组必线性无关，所以从行向量来看必有 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=4<5$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 必有无穷多解，(C) 正确.

由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 列向量只是 4 个线性无关的 5 维向量，它们不能表示任一个 5 维向量，故方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有可能无解，即(D) 不正确.

【例 4.18】 (2001,3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，若秩 $r\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=r(\boldsymbol{A})$，则线性方程组

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有无穷多解.　　(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}$ 必有唯一解.

(C) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.　　(D) $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

[　　]

【分析】 对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，

(1) 只有零解；　　(2) 必有非零解，

两者必居其一且仅居其一. 因此，(C) 与(D) 中必有一个正确.

学习札记：

A 是 n 阶矩阵，$\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix}$ 是 $n+1$ 阶矩阵，由于

$$r\begin{bmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{bmatrix} = r(A) \leqslant n < n+1,$$

故应选(D).

公共解、同解

对于方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)，如果 α 既是方程组(Ⅰ)的解，α 也是方程组(Ⅱ)的解，则称 α 是方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)的公共解.

【例 4.19】 设有两个 4 元齐次线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \qquad (\text{Ⅱ})\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(1) 求线性方程组(Ⅰ)的基础解系；

(2) 试问方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解；若没有，则说明理由.

【解】 (1) 因为方程组(Ⅰ)系数矩阵的秩 $r(A) = 2$，$n - r(A) = 4 - 2 = 2$，所以基础解系由 2 个解向量构成，给自由变量 x_3, x_4 赋值得基础解系

$$\xi_1 = [0,0,1,0]^T, \qquad \xi_2 = [-1,1,0,1]^T.$$

(2) 关于公共解，可以有几种处理方法：

1°. 把(Ⅰ)、(Ⅱ)联立起来直接求解，即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $n - r(A) = 1$，故基础解系是 $[-1,1,2,1]^T$，从而有(Ⅰ)、(Ⅱ)的公共解为 $k[-1,1,2,1]^T$，k 是任意实数.

2°. 通过(Ⅰ)与(Ⅱ)各自的通解，寻找公共解. 为此，先求(Ⅱ)的基础解系为

$$\eta_1 = [0,1,1,0]^T, \eta_2 = [-1,-1,0,1]^T,$$

从而 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$，$l_1\eta_1 + l_2\eta_2$ 分别是(Ⅰ)、(Ⅱ)的通解. 令其相等，即有

$$k_1[0,0,1,0]^T + k_2[-1,1,0,1]^T = l_1[0,1,1,0]^T + l_2[-1,-1,0,1]^T.$$

由此得 $$[-k_2, k_2, k_1, k_2]^T = [-l_2, l_1 - l_2, l_1, l_2]^T,$$

比较两个向量的对应分量得 $k_1 = l_1 = 2k_2 = 2l_2$. 所以公共解是

$$2k_2[0,0,1,0]^T + k_2[-1,1,0,1]^T = k_2[-1,1,2,1]^T.$$

3°. 把(Ⅰ)的通解代入(Ⅱ)中，如果仍是解，寻找 k_1, k_2 所应满足的关系式而求出公共解.

学习札记：

如果 $k_1\xi_1+k_2\xi_2=[-k_2,k_2,k_1,k_2]^T$ 是(Ⅱ)的解，那么应满足(Ⅱ)的方程，故

$$\begin{cases}-k_2-k_2+k_1=0,\\ k_2-k_1+k_2=0,\end{cases}$$

解出 $k_1=2k_2$，下略.

【例 4.20】 $(2007,\begin{smallmatrix}1,2\\3,4\end{smallmatrix})$ 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}\tag{1}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1\tag{2}$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

【解】 因为方程组(1)与(2)的公共解即为联立方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}\tag{3}$$

的解，对增广矩阵加减消元有

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&3&a^2-1&0\\0&1&0&a-1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&(a-1)(a-2)&0\\0&0&1-a&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\0&1&a-1&0\\0&0&1-a&a-1\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{array}\right].$$

当 $a\neq1$ 且 $a\neq2$ 时，方程组无解，从而(1)与(2)没有公共解.

当 $a=1$ 时，

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

方程组的通解是 $k[1,0,-1]^T$，即(1)与(2)的公共解是 $k[1,0,-1]^T$，k 是任意常数.

当 $a=2$ 时，

$$\overline{A}\to\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right],$$

学习札记：

方程组有唯一解$[0,1,-1]^T$，即(1)与(2)的公共解是$[0,1,-1]^T$.

【评注】 本题也可先计算方程组(1)的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2),$$

然后分情况讨论.

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$ 时，方程组(1)只有零解.

【例 4.21】 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均是 n 阶矩阵，且秩 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})<n$，证明方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解.

【证】 构造齐次线性方程组

$$\begin{cases} \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jt}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行向量组的极大线性无关组，那么矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$ 的行向量组可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir},\boldsymbol{\beta}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jt}$ 线性表出，从而

$$r\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir},\boldsymbol{\beta}_{j1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jt}) \leqslant r+t = r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B}) < n,$$

所以方程组(1)有非零解，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 有非零公共解.

对于方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)，如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅰ)的解，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 必是(Ⅱ)的解；反过来，如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是(Ⅱ)的解，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 也必是(Ⅰ)的解，则称(Ⅰ)与(Ⅱ)同解.

【例 4.22】 $(2005,\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix})$ 已知齐次方组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0, \\ x_1+x_2+ax_3=0 \end{cases} \text{和}(\text{Ⅱ})\begin{cases} x_1+bx_2+cx_3=0, \\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0 \end{cases}$$

同解，求 a,b,c 的值.

【解】 因为方程组(Ⅱ)中方程的个数小于未知量的个数，故方程组(Ⅱ)必有无穷多解. 那么由(Ⅰ)与(Ⅱ)同解，知方程组(Ⅰ)必有无穷多解. 于是

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2-a=0,$$

从而 $a=2$. 此时方程组(Ⅰ)的系数矩阵可化为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故(Ⅰ)的通解是 $k[-1,-1,1]^T$. 把 $x_1=-k,x_2=-k,x_3=k$ 代入方程组(Ⅱ)，有

学习札记：

$$\begin{cases}(-1-b+c)k=0,\\(-2-b^2+c+1)k=0,\end{cases}$$

从而 $b^2-b=0$，可得 $b=1,c=2$ 或 $b=0,c=1$.

当 $b=1,c=2$ 时，对方程组（Ⅱ）的系数矩阵 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},$$

故方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解.

当 $b=0,c=1$ 时，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$,

故方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）不同解.

综上所述，当 $a=2,b=1,c=2$ 时，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解.

【例 4.23】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，证明齐次线性方程组（Ⅰ）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与（Ⅱ）$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.

【证】 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅱ）的解，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅰ）的解，故（Ⅱ）的解全是（Ⅰ）的解.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是（Ⅰ）的解，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，那么 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=0$，即 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=0$. 从而 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\|^2=0$，故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$. 所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 必是（Ⅱ）的解，即（Ⅰ）的解全是（Ⅱ）的解.

综上所述，方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）同解.

【评注】 若 $\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$

那么 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0\Leftrightarrow a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}.$$

由 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=0$ 要看出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

因为（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，它们的基础解系所含解向量个数相同，即有

$$n-r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{A}),$$

故 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$.

2012 的考题就是希望考生用公式 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$ 来处理二次型的秩的.

方程组的应用

【例 4.24】 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\1&-1\end{bmatrix}$ 可交换的所有矩阵是_____

【分析】 矩阵乘法一般没有交换律，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，就称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

设 $\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换，则

学习札记：

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -1\end{bmatrix},$$

即有$\begin{bmatrix}x_1+2x_3 & x_2+2x_4\\x_1-x_3 & x_2-x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2 & 2x_1-x_2\\x_3+x_4 & 2x_3-x_4\end{bmatrix}$,得到方程组

$$\begin{cases}x_2-2x_3=0,\\2x_1-2x_2-2x_4=0,\\x_1-2x_3-x_4=0,\\x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

加减消元,有

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -2 & 0\\2 & -2 & 0 & -2\\1 & 0 & -2 & -1\\0 & 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

令 $x_3=t,x_4=u$,解出 $x_2=2t,x_1=2t+u$.

所以$\begin{bmatrix}2t+u & 2t\\t & u\end{bmatrix}$($t,u$ 是任意常数)为所求矩阵.

【例 4.25】 已知 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\2 & 6 & 9\\-1 & -3 & 3\end{bmatrix}$,

$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\7 & 4 & -1\\4 & 13 & -7\end{bmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

【分析】 若$\boldsymbol{A}$可逆,则$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$,现在的$\boldsymbol{A}$是不可逆的,可转换为解非齐次线性方程组.

【解】 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}$,则

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\2 & 6 & 9\\-1 & -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\7 & 4 & -1\\4 & 13 & -7\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}x_1+3x_2+3x_3=2,\\2x_1+6x_2+9x_3=7,\\-x_1-3x_2+3x_3=4,\end{cases}\quad\begin{cases}y_1+3y_2+3y_3=-1,\\2y_1+6y_2+9y_3=4,\\-y_1-3y_2+3y_3=13,\end{cases}\quad\begin{cases}z_1+3z_2+3z_3=1,\\2z_1+6z_2+9z_3=-1,\\-z_1-3z_2+3z_3=-7.\end{cases}$$

这三个方程组的系数矩阵完全一样,区别仅在常数项,为了简洁,这三个方程组的高斯消元可同时进行,即

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&3&2&-1&1\\2&6&9&7&4&-1\\-1&-3&3&4&13&-7\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&3&0&-1&-7&4\\0&0&1&1&2&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

从$\begin{cases}x_1+3x_2=-1,\\x_3=1\end{cases}$解出

$$\begin{cases}x_1=-3t-1,\\x_2=t,\\x_3=1.\end{cases}$$

类似地

$$\begin{cases}y_1=-3u-7,\\y_2=u,\\y_3=2,\end{cases}\qquad\begin{cases}z_1=-3v+4,\\z_2=v,\\z_3=-1,\end{cases}$$

从而

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}-3t-1&-3u-7&-3v+4\\t&u&v\\1&2&-1\end{bmatrix},t,u,v\text{为任意常数}.$$

【例 4.26】 (2013，$\begin{matrix}1\\2,3\end{matrix}$) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

【评注】 这是考的比较差的一道题，难度系数为 0.368，0.389，0.460，计算上的失误也非常严重，希望大家复习时要重视基本计算.

【解】 设 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得

$$\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&a\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\1&b\end{bmatrix},$$

亦即

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\-ax_1+x_2+ax_4=1,\\x_1-x_3-x_4=1,\\x_2-ax_3=b.\end{cases}$$

对增广矩阵作初等行变换，有

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&a+1\\0&0&0&0&b\end{array}\right].$$

当 $a\neq-1$ 或 $b\neq0$ 时，方程组无解.

当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时，方程组有解，此时存在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=$

学习札记：

学习札记：

B. 由于方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, k_1, k_2 \text{ 为任意实数},$$

故当且仅当 $a=-1, b=0$ 时，存在矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1+k_1+k_2 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix},$$

满足 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$.

【注】 前面上一章线性表出的计算如例 3.14，3.15，…，线性相关的判别如例3.2，例 3.13，…，以及后续下一章特征向量的求解 … 也都是通过方程组来解决的.

学习札记：

四、练习题精选

1. 填空题

(1) 方程 $x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0$ 的通解是_____.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2-a\\ 3-2a & 2-a & 1\\ 2-a & 2-a & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ a\\ -1\end{bmatrix}$，若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解且不唯一，则 $a=$_____.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解向量，且秩 $r(\boldsymbol{A})=3$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，$2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,-1,0]^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是_____.

2. 选择题

(1) 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系是 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$，则此方程组的基础解系还可以是

(A) $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$.

(B) $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$.

(C) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_4$.

(D) $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_4,\boldsymbol{\eta}_4+\boldsymbol{\eta}_1$.　[　　]

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，秩 $r(\boldsymbol{A})=n-2$，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的三个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则方程组的通解是

(A) $k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+k_1(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)$.

(C) $\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)$.

(D) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_1(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2)$.　[　　]

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个不同的解向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解必定是

(A) $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$.　(B) $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$.　(C) $k\boldsymbol{\alpha}_1$.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

3. 解答题

(1) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，求与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & a & a\\ 1 & a & 0 & 1\end{bmatrix}$，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系

学习札记：

有 2 个线性无关的解向量，试求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

(3) 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=1, \\ x_2+ax_3-ax_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_4=3, \end{cases}$ 问 a 为何值时方程组有解？并在有解时求其所有的解.

答案与提示

1. (1) $k_1[2,1,0,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-3,0,1,0]^{\mathrm{T}}+k_3[4,0,0,1]^{\mathrm{T}}$. (2) $a=3$. (3) $[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}+k[1,3,2,4]^{\mathrm{T}}$.

【提示】 (1) 由 $n-r(\boldsymbol{A})=4-1=3$ 先明确基础解系中解向量的个数，再确定自由变量求解.

(2) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解且不唯一，即方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，亦即秩 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$.

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 2-a & 1 \\ 0 & a-1 & -2a^2+7a-5 & 3a-3 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-3) & 3-a \end{array}\right],$$

再按 $a=1,a=3$ 分析判断.

或者，通过方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$ 来分析判断.

(3) $n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$，通解形式为 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\eta}$，其中特解可取为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，而 $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3)+2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

2. (1)(D). (2)(C). (3)(B).

【提示】 (1) 基础解系应当是 4 个线性无关的解，(C) 中向量个数不符，(A)、(B) 均线性相关.

(2) 按解的结构，通解形式为 $\boldsymbol{\alpha}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$. (A) 不符合通解形式，缺 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 之特解；(B) 中 $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ 不是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解；(D) 中 $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，不符合基础解系线性无关之要求；注意，$\frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$ 都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

(3) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{\alpha}_2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\neq\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{\alpha}_1=-\boldsymbol{\alpha}_2$，则(A) 不正确；若 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$，则(C) 不正确. (D) 不是通解.

3. (1) 求与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵，即求满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

$\begin{bmatrix} -3t+u & 2t \\ 3t & u \end{bmatrix}$ (t,u 为任意常数)　　参看例 4.24

(2) $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵，说明 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是 3 个方程 4 个未知数的齐次方程组，基

学习札记：

础解系含 2 个解向量表明 $4-r(\boldsymbol{A})=2$，得 $r(\boldsymbol{A})=2$. 对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\1&a&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&1&a&a\\0&0&-(a-1)^2&-(a-1)^2\end{bmatrix},$$

秩 $r(\boldsymbol{A})=2\iff a=1$.

x_3,x_4 为自由变量，令 $x_3=1,x_4=0$ 得 $\boldsymbol{\eta}_1=[1,-1,1,0]^{\mathrm{T}}$.

令 $x_3=0,x_4=1$ 得 $\boldsymbol{\eta}_2=[0,-1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

(3) $a=2$ 时，方程组无解.

$a\neq 2$ 时，方程组通解为 $\left(\dfrac{7a-10}{a-2},\dfrac{2-2a}{a-2},\dfrac{1}{a-2},0\right)^{\mathrm{T}}+k(-3,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数.

第五章　特征值与特征向量——重点，综合性强！

一、知识结构网络图

- **特征值**
  - 定义　$A\alpha=\lambda\alpha,\alpha\neq 0$
  - 求法
    - 特征值
      - 定义法
      - 特征多项式法 $|\lambda E-A|=0$
    - 特征向量
      - 定义法
      - 基础解系法 $(\lambda E-A)x=0$
  - 性质
    - 不同特征值的特征向量线性无关
    - k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量
    - $|A|=\prod\lambda_i,\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$
  - 相似
    - 定义 $\xrightarrow{P^{-1}AP=B}$ 性质(必要条件)
      - $r(A)=r(B)$
      - $|A|=|B|$
      - $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$
      - $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$
    - 可对角化 $\Longleftrightarrow$
      - A 有 n 个线性无关的特征向量
      - 如果 λ 是 k 重特征值，那么 λ 必有 k 个线性无关的特征向量
      - $r(\lambda_iE-A)=n-n_i$，λ_i 为 n_i 重特征值
    - 可对角化 $\Longleftarrow$
      - A 有 n 个不同的特征值
      - A 是实对称矩阵
  - 隐含信息
    - 必与对角矩阵相似
    - 可用正交矩阵对角化
    - 不同特征值的特征向量必_____(填空)
    - 特征值必是实数
    - k 重特征值必有 k 个线性无关的_____(填空)

注：由 $A\sim B$ $\begin{cases}\overset{(1)}{\Rightarrow} A+kE\sim B+kE,\text{进而}|A+kE|=|B+kE|,r(A+kE)=r(B+kE).\\ \overset{(2)}{\Rightarrow} A^n\sim B^n,\text{进而}A^n=PB^nP^{-1}.\end{cases}$

由 $P_1^{-1}AP_1=B,P_2^{-1}BP_2=C\ \Rightarrow\ P^{-1}AP=C$，其中 $P=P_1P_2$.

A	$kA+E$	$A+kE$	A^{-1}	A^*	A^n	$P^{-1}AP$
λ	$k\lambda+1$	$\lambda+k$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$	λ^n	λ
α	α	α	α	α	α	$P^{-1}\alpha$

学习札记：

【评注】 特征值是线性代数的重要内容之一，也是考研的热点，复习应认真仔细.

(1) 要理解特征值、特征向量的概念，掌握矩阵特征值的性质，掌握求矩阵特征值、特征向量的方法.

(2) 要理解矩阵相似的概念，掌握相似矩阵的性质，搞清矩阵能相似对角化的条件，掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

(3) 要熟悉实对称矩阵特征值、特征向量的特殊性质，掌握用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵的方法.

今年考题

(2018, $\begin{matrix}1\\2,3\end{matrix}$) 下列矩阵中，与矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似的为

(A) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(2018, 2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为_____.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

定义 5.1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在一个数 λ 及非零的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使得

$$\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \tag{5.1}$$

成立，则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，称非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的一个特征向量.

定义 5.2 设 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ 为一个 n 阶矩阵，则行列式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5.2}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程.

【评注】 由 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 有

$$(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}$ 是齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的非零解.

(1) 先由 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ_i（共 n 个）.

(2) 再由 $(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 求基础解系，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ_i 的线性无关的特征向量.

定义 5.3 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}, \tag{5.3}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

特别地，如果 $\boldsymbol{A}$ 能与对角矩阵相似，则称 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

重要定理

定理 5.1 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，那么当 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 非零时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_t\boldsymbol{\alpha}_t$ 仍是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 λ 的特征向量.

定理 5.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则

(1) $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$； (5.4)

学习札记：

(2) $|\boldsymbol{A}| = \prod \lambda_i$.　　(5.5)

定理 5.3　如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的互不相同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 分别是与之对应的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

定理 5.4　如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 m 重特征值，则属于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数不超过 m 个.

定理 5.5　如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

即若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = |\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}|. \tag{5.6}$$

定理 5.6　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

【评注】　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$（下设 $n = 3$），即有

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3] = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3]\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix},$$

即
$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_3] = [a_1\boldsymbol{\gamma}_1, a_2\boldsymbol{\gamma}_2, a_3\boldsymbol{\gamma}_3],$$

即
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_1 = a_1\boldsymbol{\gamma}_1, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_2 = a_2\boldsymbol{\gamma}_2, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_3 = a_3\boldsymbol{\gamma}_3.$$

因为矩阵 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3]$ 可逆，故 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3$ 线性无关. 又由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}_i = a_i\boldsymbol{\gamma}_i$，$\boldsymbol{\gamma}_i \neq \boldsymbol{0}$ 知 $\boldsymbol{\gamma}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 a_i 的特征向量. 即

$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} \Rightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量.

反过来，若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，则 $\boldsymbol{A}$ 必与对角矩阵相似（请自证）.

定理 5.7　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，且

$$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

定理 5.8　n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化的充分必要条件是对于 $\boldsymbol{A}$ 的每个特征值，其线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数. 即

$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda} \Leftrightarrow \lambda_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n_i 重特征值，则 λ_i 有 n_i 个线性无关的特征向量　(5.8)

$\Leftrightarrow$ 秩 $r(\lambda_i\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) = n - n_i$，$\lambda_i$ 为 n_i 重特征值.　(5.9)

定理 5.9　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值 λ_1, λ_2 所对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 必正交.

学习札记：

定理 5.10 实对称矩阵 A 的特征值都是实数.

定理 5.11 n 阶实对称阵 A 必可对角化，且总存在正交阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \tag{5.10}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

特征值、特征向量

(1) 数字型矩阵

【例 5.1】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 2\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ -1 & \lambda+2 & -2\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & 4-\lambda\\ -1 & \lambda+2 & -2\\ 3 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4 & 0 & 0\\ -1 & \lambda+2 & -3\\ 3 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-4)\begin{vmatrix}\lambda+2 & -3\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda^2+2\lambda-3)$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+3),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=4,\lambda_3=-3$.

当 $\lambda=1$ 时，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=4$ 时，由 $(4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 6 & -2\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -6 & 2\\ 0 & 17 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-4,5,17)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=-3$ 时，由 $(-3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-4 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ 3 & -1 & -6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -4 & -12\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,1)^{\mathrm{T}}$.

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $1,4,-3$ 的特征向量分别是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\alpha}_2,k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，其中 k_1,k_2,k_3 均为非零常数.

学习札记：

【例 5.2】 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&4\\0&3&5\\0&0&6\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-4\\0&\lambda-3&-5\\0&0&\lambda-6\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-6),$$

得矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=6$.

对 $\lambda=1$，由 $(E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}0&-2&-4\\0&-2&-5\\0&0&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_1=[1,0,0]^T$，因此属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量是 $k_1\alpha_1(k_1\neq0)$.

对 $\lambda=3$，由 $(3E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}2&-2&-4\\0&0&-5\\0&0&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_2=[1,1,0]^T$，因此属于特征值 $\lambda=3$ 的特征向量是 $k_2\alpha_2(k_2\neq0)$.

对 $\lambda=6$，由 $(6E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}5&-2&-4\\0&3&-5\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_3=[22,25,15]^T$，因此属于特征值 $\lambda=6$ 的特征向量是 $k_3\alpha_3(k_3\neq0)$.

【评注】 上三角矩阵、下三角矩阵、对角矩阵的特征值就是矩阵主对角线上的元素.

【例 5.3】 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\4&2&6\\6&3&9\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-3\\-4&\lambda-2&-6\\-6&-3&\lambda-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-4&\lambda-2&-3\lambda\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-22&\lambda-11&0\\-6&-3&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-13\lambda);$$

得到矩阵 A 的特征值是 $\lambda_1=13,\lambda_2=\lambda_3=0$.

学习札记：

对 $\lambda=13$，由 $(13\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}11&-1&-3\\-4&11&-6\\-6&-3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&-5\\-4&11&-6\\-6&-3&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&7&-5\\0&3&-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,3]^{\mathrm{T}}$，因此属于特征值 $\lambda=13$ 的特征向量是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1\quad(k_1\neq 0)$.

对 $\lambda=0$，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-2&-1&-3\\-4&-2&-6\\-6&-3&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,2,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[-3,0,2]^{\mathrm{T}}$，因此属于特征值 $\lambda=0$ 的特征向量是 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3\quad(k_2,k_3$ 不全为 $0)$.

【评注】 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 3 阶矩阵，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&-a_{13}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&-a_{23}\\-a_{31}&-a_{32}&\lambda-a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-\sum a_{ii}\lambda^2+S_2\lambda-|\boldsymbol{A}|,$$

其中 $S_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$.

若秩 $r(\boldsymbol{A})=1$，则

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-\sum a_{ii}\lambda^2=(\lambda-\sum a_{ii})\lambda^2,$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\sum a_{ii}$，$\lambda_2=\lambda_3=0$.

【例 5.4】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-1&3&0\\1&1&4&-1\\0&0&5&-3\\0&0&3&-1\end{bmatrix}$ 的特征值与特征向量.

【解】 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&1&-3&0\\-1&\lambda-1&-4&1\\0&0&\lambda-5&3\\0&0&-3&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-3&1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\lambda-5&3\\-3&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda^2-4\lambda+4)(\lambda^2-4\lambda+4)=(\lambda-2)^4,$$

得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda=2$（4 重根）.

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

学习札记：

$$\begin{bmatrix}-1&1&-3&0\\-1&1&-4&1\\0&0&-3&3\\0&0&-3&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&3&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得到基础解系是 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[-3,0,1,1]^{\mathrm{T}}$，因此属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$（$k_1,k_2$ 不全为 0）.

【例 5.5】 已知 $a\neq 0$，求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{bmatrix}$$

的特征值、特征向量.

【解】 方法一 （直接计算）

由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-a&-a\\-a&\lambda-1&-a&-a\\-a&-a&\lambda-1&-a\\-a&-a&-a&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-(3a+1)](\lambda+a-1)^3,$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $3a+1,1-a$（三重根）.

当 $\lambda=3a+1$ 时，由 $[(3a+1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}3a&-a&-a&-a\\-a&3a&-a&-a\\-a&-a&3a&-a\\-a&-a&-a&3a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&-3&1&1\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

可得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\lambda=3a+1$ 的特征向量为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$，$k_1\neq 0$.

当 $\lambda=1-a$ 时，由 $[(1-a)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-a&-a&-a&-a\\-a&-a&-a&-a\\-a&-a&-a&-a\\-a&-a&-a&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\lambda=1-a$ 的特征向量为 $k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$，其中 k_2,k_3,k_4 是不全为 0 的任意常数.

学习札记：

方法二　（转换）

$$A=\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}\overset{记}{=\!=}B+(1-a)E.$$

由秩 $r(B)=1$ 有

$$|\lambda E-B|=\lambda^4-4a\lambda^3,$$

得矩阵 B 的特征值为 $4a,0,0,0$，从而矩阵 A 的特征值为 $3a+1,1-a,1-a,1-a$.

对于 B，当 $\lambda=4a$ 时，由 $(4aE-B)x=0$，即

$$\begin{bmatrix} 3a & -a & -a & -a \\ -a & 3a & -a & -a \\ -a & -a & 3a & -a \\ -a & -a & -a & 3a \end{bmatrix},$$

同方法一，下略. 可得矩阵 A 关于 $\lambda=3a+1$ 的特征向量.

当 $\lambda=0$ 时，由 $(0E-B)x=0$，即

$$\begin{bmatrix} -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \\ -a & -a & -a & -a \end{bmatrix},$$

同方法一，下略. 可得矩阵 A 关于 $\lambda=1-a$ 的特征向量.

(2) 抽象矩阵

【例 5.6】　设 A 是 3 阶矩阵，且矩阵 A 的各行元素之和均为 5，则矩阵 A 必有特征向量_____.

【分析】　矩阵 $A=[a_{ij}]$ 各行元素之和均为 5，即

$$\begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13}=5, \\ a_{21}+a_{22}+a_{23}=5, \\ a_{31}+a_{32}+a_{33}=5. \end{cases}$$

用矩阵表示，有

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix},$$

即

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=5\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

故矩阵 A 必有特征值 $\lambda=5$，且必有特征向量 $[1,1,1]^{\mathrm{T}}$.

【例 5.7】　设 A 是 n 阶矩阵，α 是矩阵 A 属于特征值 λ 的特征向量，即

$$A\alpha=\lambda\alpha,\quad \alpha\neq 0,$$

学习札记：

那么

$$(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\alpha}=(\lambda+k)\boldsymbol{\alpha},$$

说明矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值是 $\lambda+k$，对应的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$.

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda^2\boldsymbol{\alpha},$$

说明矩阵 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值是 λ^2，对应的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则有

$$\lambda\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\alpha},$$

说明矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $\frac{1}{\lambda}$，对应的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$.

【例 5.8】 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，如果非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有通解 $5\boldsymbol{b}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$，其中 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

【解】 由解的结构知 $5\boldsymbol{b}$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，即 $\boldsymbol{A}(5\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$，从而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}=\frac{1}{5}\boldsymbol{b},$$

即 $\frac{1}{5}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{b}$ 是相应的特征向量.

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\eta}_2$，故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\frac{1}{5},0,0$，对应的特征向量分别是 $k\boldsymbol{b}$，$k\neq0$ 和 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$，$k_1,k_2$ 不全为 0.

(3) 相似矩阵

【例 5.9】 如果 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，

(1) 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),$$

说明 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的特征值是 λ，对应的特征向量是 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，则

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha},$$

说明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 λ，特征向量是 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.

【例 5.10】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量.

【解】 由定义及 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 和 1，对应的特征向量分别是 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$，$k_1,k_2$ 不为 0.

或者利用相似，有 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，可知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}0&2\\0&1\end{bmatrix}$，亦可得

学习札记：

$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 和 1.

又 $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ 分别是 $\boldsymbol{B}$ 的对应于特征值 0,1 的特征向量，从而由上例知

$\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0,1 的特征向量.

【例 5.11】　设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 3 维线性无关的列向量，且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量；

（Ⅱ）求行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|$.

【解】（Ⅰ）　由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_3$，知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\lambda=0$ 的特征向量，据已知条件有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)&=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-6\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{0})\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\2&-6&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，因 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，而知 $\boldsymbol{P}$ 可逆，于是

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB},\text{其中 }\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&3&0\\2&-6&0\end{bmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&0\\1&\lambda-3&0\\-2&6&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2,$$

得 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 2,2,0，从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2,2,0.

对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\-2&6&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,-2)^{\mathrm{T}}$.

由 $\boldsymbol{B\beta}=\lambda\boldsymbol{\beta}$ 知 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P\beta})=\lambda(\boldsymbol{P\beta})$，从而 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=2$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{P\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2,2,0；$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3),k_1\neq0$ 与 $k_2\boldsymbol{\alpha}_3,k_2\neq0$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $\lambda=2$ 和 $\lambda=0$ 的所有的特征向量.

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2,2,0，知 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 3,3,1，所以

$$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=3\cdot3\cdot1=9.$$

学习札记：

相似、相似对角化

【例 5.12】 若 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2,3，那么行列式 $|2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$ _____.

【分析】 因为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值，那么 $2\boldsymbol{B}$ 的特征值是 2,4,6，$2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的特征值是 1,3,5，从而 $|2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=15$.

或者，由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$，又因 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 的特征值是 1,3,5，故 $|2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=|2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=15$.

【例 5.13】 (2003,4) 设矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},$$

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$，则秩 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$ 与秩 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$ 之和等于

(A)2. (B)3. (C)4. (D)5. [ ]

【分析】 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，那么

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E},$$

从而 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})$，$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$.

易见 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&-1&0\\1&0&-2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$ 的秩分别为 3 与 1，故应选(C).

【例 5.14】 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分条件是

(A)$\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{B}^2$ 相似.

(B)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

(C)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征向量.

(D)$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均和对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似. [ ]

【分析】 如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，那么

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{B}^2,$$

即 $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$.

但当 $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$ 时，推不出 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

由于 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{B})$，显见 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似. 但 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{B}^2$，而有 $\boldsymbol{A}^2\sim\boldsymbol{B}^2$. 所以(A)是必要条件不是充分条件.

条件(B)亦是必要条件不是充分条件. 由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|,$$

即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 但条件(A)中例子告诉我们，虽然 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的

学习札记：

特征值$\lambda_1=\lambda_2=0$，但$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$是不相似的.

如果$\boldsymbol{\alpha}$是矩阵$\boldsymbol{A}$属于特征值λ的特征向量，$\boldsymbol{\alpha}$是矩阵$\boldsymbol{B}$属于特征值μ的特征向量，虽然$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$有相同的特征向量，但由于特征值的不同，所以$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$不可能相似.(C)不是充分条件，当然也不是必要条件(参看例5.9).

若$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{\Lambda}$. 则有

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2,$$

那么$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$. 令$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$，则有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，即$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 所以(D)是充分条件.

【评注】 条件(D)不是必要的，因为当$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$不能相似对角化时，矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$仍有可能相似，只要它们与同一个矩阵$\boldsymbol{C}$相似即可.

【例5.15】 不能相似对角化的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$.　　[　　]

【分析】 (A)中矩阵的特征值是1，3，0，有3个不同的特征值，故可相似对角化.

(B)中矩阵的特征值是1，1，3. 设(B)中矩阵为$\boldsymbol{A}$，因为

$$r(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r\begin{bmatrix}0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&2\end{bmatrix}=2,$$

故$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系中仅有一个解向量，即$\lambda=1$(二重根)只有一个线性无关的特征向量，所以$\boldsymbol{A}$不能相似对角化.

(C)中矩阵设为$\boldsymbol{A}$，由于$r(\boldsymbol{A})=1$，有

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda^3-\sum a_{ii}\lambda^2=\lambda^3-6\lambda^2,$$

矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值是6，0，0. 因为$r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})=1$，说明$(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系由2个解向量构成，即$\lambda=0$(二重根)有2个线性无关的特征向量，所以$\boldsymbol{A}$可以相似对角化.

(D)中矩阵设为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，则$\boldsymbol{A}$必可相似对角化.

【例5.16】 在下列矩阵中，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}2&3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{bmatrix}$$

两两相似的矩阵是_____.

【分析】 这几个矩阵的秩分别是1，2，1，1，由相似矩阵的秩相等知矩

学习札记：

阵 $\boldsymbol{B}$ 不和 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 相似，把 $\boldsymbol{B}$ 排除. 从特征值来看依次为 3,0,0;3,0,0;2,0,0;3,0,0，可知矩阵 $\boldsymbol{C}$ 要排除.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$，

秩 $r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1 \Rightarrow n-r(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=2$

$\Rightarrow (0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解

$\Rightarrow \lambda=0$（二重根）有 2 个线性无关的特征向量

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}.$$

同理知 $\boldsymbol{D}\sim\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$. 因此 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{D}$.

【例 5.17】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&1\\-1&3&1\\2&0&1\end{bmatrix}$，判断 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似，并说明理由.

【分析】 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵必可对角化，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似首先要看 $\boldsymbol{B}$ 能否对角化. 若 $\boldsymbol{B}$ 不能对角化，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 肯定不相似；若 $\boldsymbol{B}$ 能对角化，则应进一步检查 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是否有相同的特征值，特征值一致时才相似.

【解】 对于 $\boldsymbol{B}$，由特征方程

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-1\\1&\lambda-3&-1\\-2&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-3)^2=0,$$

可得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 3,3,0. 当 $\lambda=3$ 时，

$$r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=r\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\-2&0&2\end{bmatrix}=1=n-n_i,$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 可对角化.

又因 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&1\\-1&\lambda-2&-1\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&\lambda-3&0\\-1&\lambda-2&-1\\0&\lambda-3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2,$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也是 3,3,0，所以 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

理由：$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可对角化，且都与 $\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&0\end{bmatrix}$ 相似.

学习札记：

【评注】 特征值相同是矩阵相似的必要条件(定理 5.5). 例如

$$\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix} 与 \begin{bmatrix}2 & \\ & 3\end{bmatrix}$$

肯定不相似，因为它们的特征值不同.

可是特征值相同的矩阵不一定相似. 例如

$$C=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

的特征值也是 3,3,0，但因 $r(3E-C)=2\neq n-n_i=3-2$，所以 C 不能对角化，那么 C 与 A，B 均不相似.

但若 A，B 是实对称矩阵，则 A 与 B 有相同的特征值是 A 与 B 相似的充分必要条件.(这是 2002 的考题，请证明)

【例 5.18】 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & a & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & -2 & 5\end{bmatrix}$ 的特征值有重根，判断矩阵 A 能否相似对角化，并说明理由.

【解】 矩阵 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & 2 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+10+a).$$

如果 $\lambda=2$ 是重根，则 $\lambda^2-8\lambda+10+a$ 中含有 $\lambda-2$ 的因式，于是 $2^2-16+10+a=0$，解出 $a=2$. 此时 $\lambda^2-8\lambda+12=(\lambda-2)(\lambda-6)$，矩阵 A 的 3 个特征值是 2,2,6.

对于 $\lambda=2$，由于

$$r(2E-A)=r\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}=1,$$

故 $\lambda=2$(二重根) 有 2 个线性无关的特征向量，A 可以相似对角化.

若 $\lambda=2$ 不是重根，则 $\lambda^2-8\lambda+10+a$ 是完全平方，于是

$$8^2-4(10+a)=0,$$

解出 $a=6$，从而矩阵 A 的特征值是 2,4,4.

对于 $\lambda=4$，由于

$$r(4E-A)=r\begin{bmatrix}3 & -6 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix}=2,$$

说明 $\lambda=4$(二重根) 只有 1 个线性无关的特征向量，A 不能相似对角化.

学习札记：

相似对角化时的可逆矩阵 P

提示 若 $P^{-1}AP=\Lambda$，则 P——A 的特征向量，Λ——A 的特征值.

【例 5.19】 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}6&2&4\\2&3&2\\4&2&6\end{bmatrix}$，求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

【解】 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-6&-2&-4\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&2-\lambda\\-2&\lambda-3&-2\\-4&-2&\lambda-6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\-2&\lambda-3&-4\\-4&-2&\lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-3&-4\\-2&\lambda-10\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-11)(\lambda-2)^2,$$

得矩阵 A 的特征值是 11,2,2.

当 $\lambda=11$ 时，由 $(11E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-4&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_1=[2,1,2]^T$.

当 $\lambda=2$ 时，由 $(2E-A)x=0$，即

$$\begin{bmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\alpha_2=[1,-2,0]^T$，$\alpha_3=[0,-2,1]^T$.

那么，令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}11&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.

* 这是一个基础题，复习时要重视，原理要清晰.

【评注】 求 A 相似标准形的方法（对可对角化的矩阵）

(1) 求 A 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$；

(2) 对每个特征值 λ_i，求 $(\lambda_iE-A)x=0$ 的基础解系，得特征向量 α_1，α_2,α_3；

学习札记：

(3) 令可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3).$$

【例 5.20】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&0&a\\0&0&3\end{bmatrix}$ 与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，求 a 的值. 并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解】 由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-3&\lambda&-a\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-3&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-3)^2,$$

得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $3,3,-1$.

因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根，而 $\boldsymbol{A}$ 又与对角矩阵相似，故 $\lambda=3$ 必有 2 个线性无关的特征向量，那么秩 $r(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$.

$$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-3&3&-a\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&-a-3\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $a=-3$.

对 $\lambda=3$，解齐次线性方程组 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-3&3&3\\0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-1$，解齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3&-1&-1\\-3&-1&3\\0&0&-4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-3,0]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-3\\0&1&0\end{bmatrix}$，得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}3&&\\&3&\\&&-1\end{bmatrix}$.

【例 5.21】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性无关的 2 维列向量，且满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(Ⅱ) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

【解】 (Ⅰ) 按已知条件，有

学习札记：

$$A[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_2,-2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

记 $\boldsymbol{P}_1=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]$ 是可逆矩阵，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，有 $\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}$，从而 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$. 由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}\lambda & 2\\ -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda+2=(\lambda-1)(\lambda-2),$$

知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值是 1,2，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2.

（Ⅱ）对矩阵 $\boldsymbol{B}$，由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=[-2,1]^{\mathrm{T}}$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得矩阵 $\boldsymbol{B}$ 关于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_2=[-1,1]^{\mathrm{T}}$.

那么，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 关于特征值 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$ 的特征向量分别是

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\beta}_1=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{\beta}_2=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

令 $\boldsymbol{P}=[-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2]$，则有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix}.$$

【评注】 关于可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 也可如下处理：

令 $\boldsymbol{P}_2=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2]$，有 $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{BP}_2=\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix}$，进而

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}(\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1)\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix},$$

得 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=(-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$.

【例 5.22】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}6 & a\\ -1 & b\end{bmatrix}$ 相似，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知

$$\begin{cases}1+3=6+b,\\ -5=a+6b,\end{cases}$$

解出 $a=7,b=-2$.

又 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4\\ -2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)$，

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 5，−1.

由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1]^{\mathrm{T}}$.

由 $(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=[-2,1]^{\mathrm{T}}$.

学习札记：

令 $P_1=[\alpha_1,\alpha_2]=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}$，得

$$P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{bmatrix}5&\\&-1\end{bmatrix}.$$

类似地，由 $(5E-B)x=0$ 得基础解系 $\beta_1=[-7,1]^T$.

由 $(-E-B)x=0$ 得基础解系 $\beta_2=[-1,1]^T$.

令 $P_2=[\beta_1,\beta_2]=\begin{bmatrix}-7&-1\\1&1\end{bmatrix}$，得 $P_2^{-1}BP_2=\Lambda=\begin{bmatrix}5&\\&-1\end{bmatrix}$.

由 $P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2\Rightarrow P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$.

令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&-1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&-5\\0&2\end{bmatrix}$，有

$$P^{-1}AP=B.$$

练习　(2017,2)　设 A 为三阶矩阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为可逆矩阵，使得 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则 $A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$

(A) $\alpha_1+\alpha_2$.　　(B) $\alpha_2+2\alpha_3$.

(C) $\alpha_2+\alpha_3$.　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2$.

求参数的问题

【例 5.23】　已知 $A=\begin{bmatrix}1&-2&-4\\-2&x&-2\\-4&-2&1\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&y&0\\0&0&-4\end{bmatrix}$ 相似，则 $y=$ _____.

【分析一】　因 $A\sim B$ 知 $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$，又 A 和 B 有相同的特征值，知 $\lambda=-4$ 是 A 的特征值，故有

$$\begin{cases}1+x+1=5+y+(-4),\\ |-4E-A|=\begin{vmatrix}-5&2&4\\2&-4-x&2\\4&2&-5\end{vmatrix}=0,\end{cases}$$

学习札记：

即$\begin{cases} x+1=y, \\ 9(x-4)=0, \end{cases}$ 解出 $y=5$.

【评注】 注意本题

$$|5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5-x & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0 \text{ 未出现 } x \text{ 的方程.}$$

【分析二】 因 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 知 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$. 又

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 4 \\ 2 & \lambda-x & 2 \\ 4 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 4 \\ 0 & \lambda-x & 2 \\ 5-\lambda & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-5)[\lambda^2+(3-x)\lambda-3x-8],$$

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=(\lambda-5)(\lambda-y)(\lambda+4),$$

故 $\lambda^2+(3-x)\lambda-3x-8=\lambda^2+(4-y)\lambda-4y$，即

$$\begin{cases} 3-x=4-y, \\ 3x+8=4y, \end{cases}$$

解出 $x=4, y=5$.

【例 5.24】 (2000,4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & 4 & y \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$，已知 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，试求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角形矩阵.

【解】 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个线性无关的特征向量，而 $\lambda=2$ 是其二重特征值，故 $\lambda=2$ 必有两个线性无关的特征向量，因此方程组 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系由两个解向量构成，故秩 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$. 由

$$2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -x & -2 & -y \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2-x & 0 & -y-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

知 $x=2, y=-2$. 于是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix},$$

由特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ 3 & 3 & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ \lambda-2 & \lambda-2 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)^2(\lambda-6),$$

得到矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=6$.

对 $\lambda=2$，由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-2 & -2 & 2\\3 & 3 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得到特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=6$，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & -1\\-2 & 2 & 2\\3 & 3 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\0 & 3 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得到特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,-2,3]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -2\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 6\end{bmatrix}.$$

练习　(2003年)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & a\end{bmatrix}$ 可逆，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\b\\1\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征向量，λ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的特征值，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 试求 a,b 和 λ 的值.

学习札记：

用相似求 A^n

提示　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^n$，故 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.

【例 5.25】 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 2 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\0 & \lambda-2 & -2\\-1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2),$$

学习札记：

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,2,0.

由 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,-2,1]^{\mathrm{T}}$.

由 $(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得 $\lambda=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}}$.

由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-1 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得 $\lambda=0$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{bmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}^n$，从而

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 2^n & \\ & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^n-1 & 1 & 2^n\\ 2^n-2 & 2 & 2^n\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

【例 5.26】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$.

【分析】 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，有 $\boldsymbol{B}^{100}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{100}\boldsymbol{P}$，从而可利用 $\boldsymbol{B}^{100}$ 间接求出 $\boldsymbol{A}^{100}$.

【解】 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

学习札记：

因为

$$B=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=E+C,$$

故

$$B^{100}=(E+C)^{100}=E+100C=\begin{bmatrix}1&100\\0&1\end{bmatrix},$$

那么 $A^{100}=(PBP^{-1})^{100}=(PBP^{-1})(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})=PB^{100}P^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&100\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}201&400\\-100&-199\end{bmatrix}.$$

反求矩阵A

【例 5.27】 (1995,4) 设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$，其中列向量 $\alpha_1=[1,2,2]^T,\alpha_2=[2,-2,1]^T,\alpha_3=[-2,-1,2]^T$，试求矩阵 A.

【解法一】 由 $A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=2\alpha_2,A\alpha_3=3\alpha_3$，知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是矩阵 A 不同特征值的特征向量，它们线性无关. 利用分块矩阵，有

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3].$$

因为矩阵 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$ 可逆，故

$$A=[\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3][\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&4&-6\\2&-4&-3\\2&2&6\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7&0&-2\\0&5&-2\\-2&-2&6\end{bmatrix}.$$

【解法二】 因为矩阵 A 有 3 个不同的特征值，所以 A 可相似对角化，有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{bmatrix},P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3],$$

那么 $A=P\Lambda P^{-1}=\cdots$　下略

【例 5.28】 已知 3 阶矩阵 A 的第一行元素全是 1，且 $\alpha_1=[1,1,1]^T$，$\alpha_2=[1,0,-1]^T,\alpha_3=[1,-1,0]^T$ 是矩阵 A 的 3 个线性无关的特征向量，求矩阵 A，并求 $(A-\frac{3}{2}E)^6$.

【解】 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，则按特征值定义

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_1=3,$$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\lambda_2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow\lambda_2=0,$$

类似地

$$\lambda_3=0.$$

学习札记：

于是
$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(3\alpha_1,0,0),$$
$$A=(3\alpha_1,0,0)(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}3&0&0\\3&0&0\\3&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}.$$

由 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(3\alpha_1,0,0)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}$ 知，

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix},$$

那么 $$A-\frac{3}{2}E\sim\Lambda-\frac{3}{2}E\Rightarrow\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6\sim\left(\Lambda-\frac{3}{2}E\right)^6.$$

又 $\left(\Lambda-\frac{3}{2}E\right)^6=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&&\\&-\frac{3}{2}&\\&&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}^6=\left(\frac{3}{2}\right)^6E$，故

$$\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6=P\left[\left(\frac{3}{2}\right)^6E\right]P^{-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^6E.$$

实对称矩阵

提示　实对称矩阵有哪些特殊的性质？如何用来做题？

【例 5.29】 设 A 是 3 阶实对称矩阵，秩 $r(A)=2$，若 $A^2=A$，则 A 的特征值是_____.

【分析】 设 λ 是 A 的任一特征值，α 是属于 λ 的特征向量，即 $A\alpha=\lambda\alpha$，$\alpha\neq 0$，那么

$$A^2\alpha=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha.$$

由 $A^2=A$，有 $\lambda^2\alpha=\lambda\alpha$，即 $(\lambda^2-\lambda)\alpha=0$ 且 $\alpha\neq 0$，故矩阵 A 的特征值是 1 或 0.

因为 A 是实对称矩阵，知 $A\sim\Lambda$，且 Λ 由 A 的特征值所构成，根据秩 $r(A)=r(\Lambda)$，有

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},$$

所以矩阵 A 的特征值是 1,1,0.

学习札记：

【评注】 因为满足 $A^2=A$ 的矩阵 A 不唯一. 例如

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}-1&-1\\2&2\end{bmatrix},\cdots$$

所以仅由条件 $A^2=A$ 并不能确定矩阵 A 的特征值，只是知道矩阵 A 的特征值只能取 1 或 0.

【例 5.30】 n 阶矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a&1&1&\cdots&1\\1&a&1&\cdots&1\\1&1&a&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&a\end{bmatrix},$$

则秩 $r(A)=$ _____.

【分析】 因为 A 是实对称矩阵，$A\sim\Lambda$. 只要求出 $r(\Lambda)$ 就知 $r(A)$，为此由 A 的特征值入手. 因为

$$A=\begin{bmatrix}a-1&&&&\\&a-1&&&\\&&a-1&&\\&&&\ddots&\\&&&&a-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1&1&\cdots&1\\1&1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{bmatrix}$$

$$=(a-1)E+B,$$

而矩阵 B 的秩为 1，有

$$|\lambda E-B|=\lambda^n-n\lambda^{n-1},$$

得到矩阵 B 的特征值是 $n,0,0,\cdots,0$（$n-1$ 个），因此矩阵 A 的特征值是 $n+a-1,a-1,a-1,\cdots,a-1$.

又因 A 是实对称矩阵，故

$$A\sim\Lambda=\begin{bmatrix}n+a-1&&&\\&a-1&&\\&&\ddots&\\&&&a-1\end{bmatrix},$$

那么

$$r(A)=\begin{cases}n, & 若\ a\neq1\ 且\ a\neq1-n,\\ n-1, & 若\ a=1-n,\\ 1, & 若\ a=1.\end{cases}$$

学习札记：

练习 (2017,$\frac{1}{3}$) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维单位列向量，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，则

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆. (B) $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

(C) $\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆. (D) $\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 不可逆.

【例 5.31】 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -2 & -4\\ -2 & 6 & -2\\ -4 & -2 & 3\end{bmatrix}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

【解】 由 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 4\\ 2 & \lambda-6 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 0 & 7-\lambda\\ 2 & \lambda-6 & 2\\ 4 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 0 & 0\\ 2 & \lambda-6 & 4\\ 4 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda^2-5\lambda-14),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=7,\lambda_3=-2$.

对 $\lambda=7$，由 $(7\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[-1,2,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-2$，由 $(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是同一个特征值的特征向量，不正交，故应 Schmidt 正交化. 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4\\ -2\\ 5\end{bmatrix},$$

学习札记：

单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-4\\-2\\5\end{bmatrix}.$$

再对 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}.$$

那么，令

$$\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix},$$

则 P 为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}7 & & \\ & 7 & \\ & & -2\end{bmatrix}.$$

【评注】 这是基础题，搞清用正交矩阵把实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为对角矩阵的步骤：

这一类题目在考场上往往要先处理一些未知的参数，然后

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

(3) 单位化，当特征值有重根时，可能还要 Schmidt 正交化；

(4) 构造正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ （$\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 次序要协调一致）.

【例 5.32】 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，且 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}.$$

（Ⅰ）求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值、特征向量；

（Ⅱ）求 $\boldsymbol{A}$.

【解】 （Ⅰ）记 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2]$，由 $\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，得

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2]=2[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2],$$

即 $\lambda=2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=2$ 的线性无关的特征向量. 由秩 $r(\boldsymbol{A})=2$，知 $\lambda=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，设 $\boldsymbol{\alpha}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$ 是其特征向量.

因实对称矩阵中对应不同特征值的特征向量相互正交，故有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\gamma}_1=$

学习札记：

$0, \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\gamma}_2 = 0$，即

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

解得其基础解系为$[1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

故$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$是$\boldsymbol{A}$的二重特征值，$k_1[1,0,-1]^{\mathrm{T}} + k_2[0,1,0]^{\mathrm{T}}$（其中$k_1, k_2$不全为0）是$\lambda = 2$的所有特征向量.

$\lambda_3 = 0$是$\boldsymbol{A}$的特征值，$k_3[1,0,1]^{\mathrm{T}}(k_3 \neq 0)$是$\lambda = 0$的所有特征向量.

（Ⅱ）令$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\alpha})$，有$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$，那么

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

【评注】 要会用正交来求特征向量. 如果实对称矩阵$\boldsymbol{A}$有3个不同的特征值，若知道两个特征向量，就可求出第三个特征向量. 若特征值有重根，那么知道那个单根的特征向量就可求出重根的所有特征向量.

【例5.33】 $(2010, \begin{matrix}2\\3\end{matrix})$ 设$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$，有正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$为对角矩阵，若$\boldsymbol{Q}$的第1列为$\frac{1}{\sqrt{6}}[1,2,1]^{\mathrm{T}}$，求$a, \boldsymbol{Q}$.

【分析】 $\boldsymbol{Q}$是正交矩阵，有$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}^{-1}$，因而$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$，即用正交矩阵把$\boldsymbol{A}$相似对角化，$\boldsymbol{Q}$的列向量即为$\boldsymbol{A}$的特征向量.

【解】 由于$\frac{1}{\sqrt{6}}[1,2,1]^{\mathrm{T}}$是正交矩阵$\boldsymbol{Q}$的第1列，因此$[1,2,1]^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的特征向量. 设特征值为$\lambda_1$，有

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

即
$$\begin{cases} 0 + (-2) + 4 = \lambda_1, \\ -1 + 6 + a = 2\lambda_1, \\ 4 + 2a + 0 = \lambda_1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, \\ a = -1. \end{cases}$$

学习札记：

于是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & -1\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}$，由

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & -4\\ 1 & \lambda-3 & 1\\ -4 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-5)(\lambda+4),$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $2,5,-4$.

对 $\lambda=5$，由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}5 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 1\\ -4 & 1 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=-4$，由 $(-4\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & -4\\ 1 & -7 & 1\\ -4 & 1 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}$.

由于实对称矩阵中对应不同特征值的特征向量相互正交，故只需把 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,-1]^{\mathrm{T}},$$

那么令
$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},$$

则有
$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{bmatrix}.$$

【例 5.34】（定理 5.9）设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，λ_1 与 λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 分别是属于 λ_1 与 λ_2 的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

【证】　据已知有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_1\neq\lambda_2$，那么

$$\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2,$$

所以 $(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$. 又 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交.

学习札记：

四、练习题精选

1. 填空题

(1) 若 1 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}$ 的特征值，则 $a=$ _____.

(2) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & a\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ 只有一个线性无关的特征向量，则 $a=$ _____.

(3) $\boldsymbol{A}$ 是 4 阶矩阵，伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值是 $1,-2,-4,8$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是_____.

2. 选择题

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 的三个特征值是

(A)1,4,0.　(B)2,3,0.　(C)2,4,0.　(D)2,4,-1.　[　　]

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶不可逆矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量，则下列不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2$.　(B)$5\boldsymbol{\alpha}_3$.　(C)$\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.　(D)$\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.　[　　]

(3) 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$ 不相似的矩阵是

(A)$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.　(B)$\begin{bmatrix}3 & 5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.　(C)$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{bmatrix}$.　(D)$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$.　[　　]

3. 解答题

(1) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，特征值是 $1,1,-2$，其中属于 $\lambda=-2$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}^3$.

(2) 已知 $\lambda=2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 2\\ 2 & 4 & a\\ 2 & a & a+2\end{bmatrix}$ 的二重特征值，求 a 的值并求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{\Lambda}$.

(3) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于不同特征值的特征向量，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 不是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(4) 已知 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的特征值.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 不能相似对角化.

学习札记：

答案与提示

1.(1) -4.　(2) -1.　(3) $4,-2,-1,\frac{1}{2}$.

【提示】 (1) 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，即 $|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ -5 & 1-a & -3\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -2\\ -5 & 1-a & -3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a+4.$$

(2) 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只有一个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值必是二重根.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -a\\ -1 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2-8\lambda+15-a=(\lambda-4)^2,$$

故 $a=-1$.

(3) 由 $|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$ 及 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 知

$$|\boldsymbol{A}^*|=1\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot 8=|\boldsymbol{A}|^3\Rightarrow|\boldsymbol{A}|=4.$$

又若 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 λ，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值是 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，从而知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $4,-2,-1,\frac{1}{2}$.

2.(1)(A).　(2)(D).　(3)(C).

【提示】 (1) 易见 $|\boldsymbol{A}|=0$，0 必是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，可排除(D).

由 $\sum\lambda_i=\sum a_{ii}=5$，可排除(C).

对于(A)和(B)可任选一个不同的特征值计算，由于

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & -2 & -1\\ -1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0,$$

知 $\lambda=1$ 必是特征值，因而应选(A).

(2) 注意定理 5.1 和练习题 3(3).

(3) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1,3. $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1 & \\ & 3\end{bmatrix}$，矩阵(A)、(B)、(D)的特征值也均是 1,3，它们都可相似对角化，也就都与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

矩阵(C)的特征值是 4,0，它不与 $\boldsymbol{A}$ 相似. 因为相似的必要条件是有相同的特征值.

3.(1) 设 $\lambda=1$ 的特征向量是 $\boldsymbol{\beta}=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=x_1+x_3=0$，解得属于 $\lambda=1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\beta}_1=[0,1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$.

因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，必可相似对角化，有

学习札记：

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{bmatrix}, \text{其中 } P = [\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}],$$

那么
$$A = P\Lambda P^{-1},$$
$$A^3 = (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda^3 P^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{9}{2} & 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

(2)A 是实对称矩阵，$\lambda = 2$ 是二重根，故 $\lambda = 2$ 必有 2 个线性无关的特征向量，从而秩 $r(2E - A) = 1$，可求出 $a = 2$.

由 $\sum \lambda_i = \sum a_{ii}$ 可求出所有特征值.

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{则 } Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{bmatrix}.$$

(3)【提示】 用反证法.

(4)(用 AB 与 BA 有相同的特征多项式)

$$|\lambda E - AB| = |\lambda AA^{-1} - AB| = |A(\lambda A^{-1} - B)|$$
$$= |A||\lambda A^{-1} - B| = |\lambda A^{-1} - B| \cdot |A| = |\lambda E - BA|.$$

或者(用相似矩阵有相同的特征值)

因为 A 可逆，有 $A^{-1}(AB)A = BA$，即 $AB \sim BA$，因而 AB 与 BA 有相同的特征值.

(5) 设 λ 是 A 的任一特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的特征向量，即

$$A\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}.$$

那么 $A^3\boldsymbol{\alpha} = \lambda^3\boldsymbol{\alpha}$. 又因 $A^3 = O$，可知 $\lambda = 0$，即矩阵 A 的特征值是 $\lambda = 0$(n 个).

对于齐次线性方程组 $(0E - A)x = \mathbf{0}$，由于

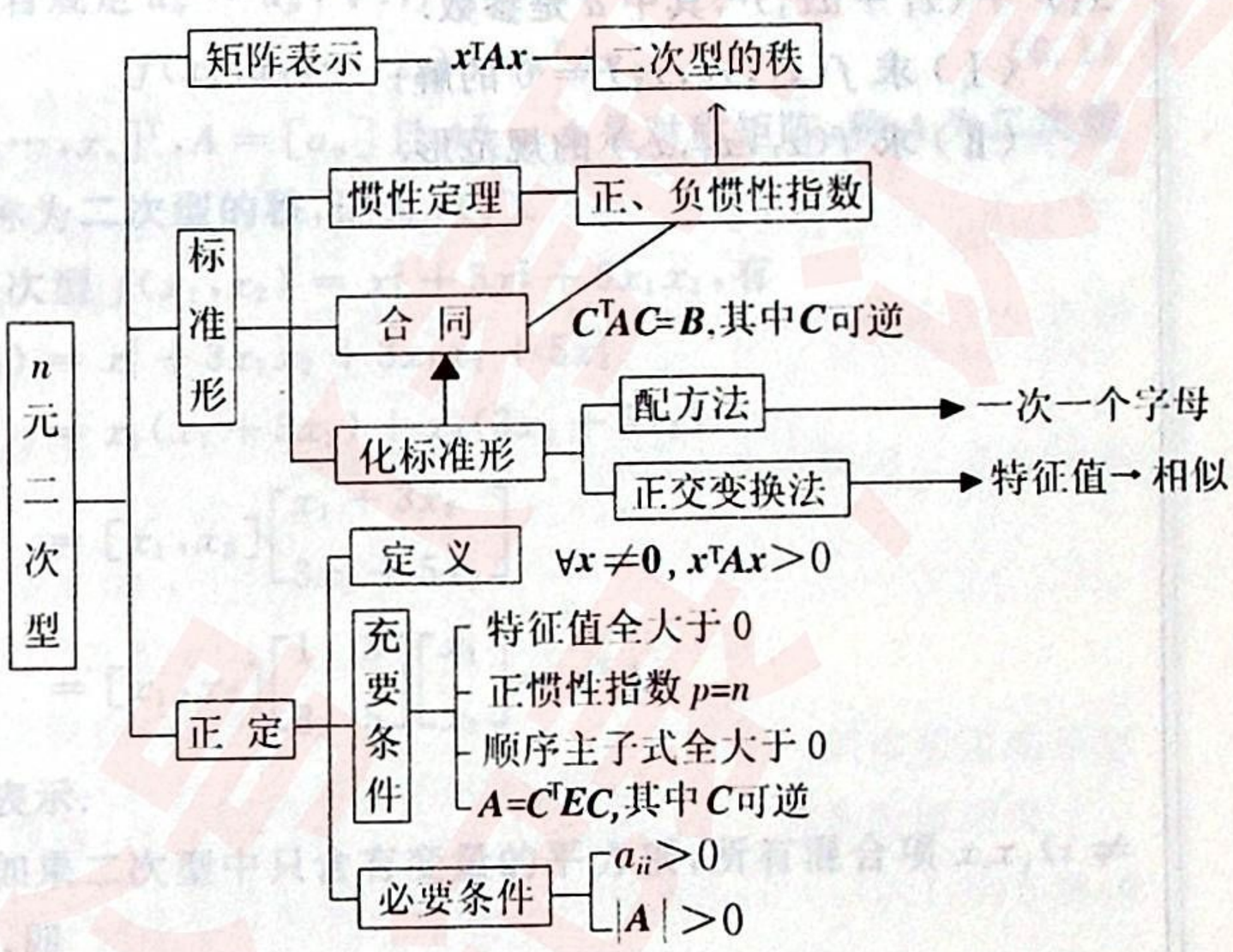
$$r(0E - A) = r(A) \geqslant 1,$$

那么 $n - r(0E - A) \leqslant n - 1$，从而 $\lambda = 0$ 没有 n 个线性无关的特征向量.

第六章　二次型

——重点，注意和特征值、特征向量的联系！

一、知识结构网络图



学习札记：

【评注】 二次型的两大板块要复习整理清楚，一个是标准形，另一个是正定性.

(1) 了解二次型的概念，掌握用矩阵形式表示二次型，了解合同变换和合同矩阵的概念.

(2) 理解二次型秩的概念，了解二次型的标准形、规范形等概念，了解惯性定理的条件和结论，掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，了解用配方法化二次型为标准形的方法.

(3) 理解正定二次型、正定矩阵的概念，掌握正定矩阵的性质.

今年考题

$(2018,\begin{smallmatrix}1\\2,3\end{smallmatrix})$ 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数.

(Ⅰ) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；

(Ⅱ) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

学习札记：

二、基本内容与重要结论

基础知识

定义 6.1　含有 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\&+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n\end{aligned}$$

称为 n 元**二次型**. 若规定 $a_{ij}=a_{ji}$, $\forall\, i,j=1,2,\cdots,n$,则二次型有矩阵表示

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \tag{6.1}$$

其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 且 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵,称 $\boldsymbol{A}$ 为**二次型的矩阵**. 秩 $r(\boldsymbol{A})$ 称为**二次型的秩**,记为 $r(f)$.

例如,二元二次型 $f(x_1,x_2)=x_1^2+5x_2^2+6x_1x_2$,有

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2)&=x_1^2+3x_1x_2+3x_1x_2+5x_2^2\\&=x_1(x_1+3x_2)+x_2(3x_1+5x_2)\\&=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}x_1+3x_2\\3x_1+5x_2\end{bmatrix}\\&=[x_1,x_2]\begin{bmatrix}1&3\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

为二次型的矩阵表示.

定义 6.2　如果二次型中只含有变量的平方项,所有混合项 $x_ix_j(i\neq j)$ 的系数全是零,即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2, \tag{6.2}$$

这样的二次型称为**标准形**.

在标准形中,若平方项的系数 d_j 为 1,−1 或 0,即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2, \tag{6.3}$$

则称其为二次型的**规范形**.

定义 6.3　在二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形中,正平方项的个数 p 称为二次型的**正惯性指数**,负平方项的个数 q 称为二次型的**负惯性指数**.

定义 6.4　如果

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+c_{13}y_3,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+c_{23}y_3,\\x_3=c_{31}y_1+c_{32}y_2+c_{33}y_3\end{cases} \tag{6.4}$$

满足

学习札记：

$$|C| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

称(6.4)为由 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^{\mathrm{T}}$ 到 $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, y_3]^{\mathrm{T}}$ 的**坐标变换**.

【注】 坐标变换(6.4)用矩阵表示，即

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \text{或} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵.

定义 6.5 两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}, \tag{6.5}$$

就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同，记作 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$. 并称由 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的变换为**合同变换**，称 $\boldsymbol{C}$ 为合同变换的矩阵.

定义 6.6 对二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，如果对任何 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$，则称二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是**正定二次型**，并称实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是**正定矩阵**.

例如，二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2$，平方项 x_3^2 的系数是 -4，如果取 $\boldsymbol{x} = [0, 0, 1]^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$，则有

$$f(0,0,1) = -4 < 0,$$

说明这个二次型不是正定的. 二次型的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

也不是正定矩阵.

类似地请考查 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_3$，若取 $\boldsymbol{x} = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$，有 $f(0,1,0) = 0$，由此知 $\boldsymbol{A}$ 正定的必要条件是 $a_{ii} > 0 (i = 1, 2, 3)$.

如何判断 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ 正定？

主要定理

定理 6.1 变量 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 的 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后，化为变量 $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}}$ 的 n 元二次型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

注意，n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经坐标变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，有

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

因为 $\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B},$

学习札记：

说明 $y^{\mathrm{T}}By$ 是二次型的矩阵表示. 即以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为自变量的二次型经坐标变换 $x=Cy$ 化为以 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为自变量的二次型. 二次型矩阵由 A 转换为 B，经坐标变换二次型矩阵是合同的.

特别地，若 $x=Cy$ 是正交变换，即 C 是正交矩阵，则有

$$B=C^{\mathrm{T}}AC=C^{-1}AC,$$

即经过正交变换，二次型矩阵不仅合同而且相似.

定理 6.2　任意的 n 元二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 都可以通过坐标变换化成标准形

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2,$$

其中 $d_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是实数.

定理 6.3　任一 n 阶实对称矩阵 A，总可以合同于一个对角矩阵，即

$$C^{\mathrm{T}}AC=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}. \tag{6.6}$$

定理 6.4　（惯性定理）对于一个二次型，不论选取怎样的坐标变换使它化为仅含平方项的标准形，其中正平方项的个数 p，负平方项的个数 q 都是由所给二次型唯一确定的.

定理 6.5　对任一个 n 元二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$，其中 A 是 n 阶实对称矩阵，必存在正交变换 $x=Qy$（Q 是正交矩阵），使得 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 化成标准形

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

定理6.6　n 元二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定的充分必要条件有：

(1) A 的正惯性指数是 n；

(2) A 与 E 合同，即存在可逆矩阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC=E$；

(3) A 的所有特征值 $\lambda(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正数；

(4) A 的各阶顺序主子式均大于零.

推论　$x^{\mathrm{T}}Ax$ 正定的必要条件是：

(1) $a_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$；

(2) $|A|>0$.

学习札记：

三、典型例题分析选讲

二次型基本概念

【例 6.1】 二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2+3x_3)(x_1-2x_2+x_3)$$

的矩阵 $\boldsymbol{A}=$ _____.

【分析】 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}(1,-2,1)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-4&-2\\2&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

故二次型矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-4&-2\\2&-2&3\end{bmatrix}$.

【评注】 本题中矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&-4&2\\3&-6&3\end{bmatrix}$ 不是对称矩阵，因而不是二次型的矩阵，改成对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的方法：$a_{ii}=b_{ii}$，$a_{ij}=\frac{1}{2}(b_{ij}+b_{ji})$.

【例 6.2】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3$ 的秩为 2，则 $a=$ _____.

【分析】 二次型 f 的秩为 2，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2. 由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix},$$

由 $|\boldsymbol{A}|=(a-1)(a+2)=0$，知 $a=1$ 或 -2. 易见 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，故 $a=-2$.

学习札记：

【例 6.3】 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的正惯性指数 $p=$ _____.

【分析】 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1$

$$=2\left[x_1^2+x_1(x_2+x_3)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2\right]+2x_2^2$$

$$+2x_3^2-2x_2x_3-\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2$$

$$=2\left(x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2,$$

可见 $p=2$.

【评注】 如果认为二次型的标准形是

$$f=y_1^2+y_2^2+y_3^2, \tag{1}$$

从而讲 $p=3,q=0$ 就不正确了.

因为对于

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2, \\ y_2=\quad\ \ x_2-x_3, \\ y_3=x_1\quad\ \ +x_3, \end{cases} \tag{2}$$

有行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

从而(2)不是坐标变换，那么(1)也就不是本题中二次型 f 的标准形.

二次型的标准形

【例 6.4】 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+ax_3^2+2x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化成标准形 $y_1^2+by_2^2-y_3^2$，则 $a=$ _____

【分析】 二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 必存在坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化其为标准形 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$. 即实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使其与对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同，亦即 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{\Lambda}$.

如果选择正交变换，即 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵，那么

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

说明在正交变换下，$\boldsymbol{A}$ 不仅与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 合同而且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似，因此 $\boldsymbol{\Lambda}$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 另一方面，在二次型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$ 中，$\boldsymbol{\Lambda}$ 的主对角线元素就是标准形平方项的系数.

因此，二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经正交变换化为标准形时，标准形中平方项的系数就是二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

由 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & & \\ & b & \\ & & -1 \end{bmatrix}$，有 $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$ 和 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，即

学习札记：

$$\begin{cases}2+0+a=1+b+(-1),\\-2=-b,\end{cases}$$

解得 $a=0$.

或者，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\0 & \lambda & -1\\0 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-a\lambda-1)$，

(*)

又 A 的特征值是 $1,b,-1$，把 $\lambda=1$ 代入(*)，得 $a=0$.

练习 (2011,3) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为_____.

【例 6.5】 已知二次型 $x^TAx=x_1^2-5x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 的秩为 2，$[2,1,2]^T$ 是 A 的特征向量，那么经正交变换二次型的标准形是_____.

【分析】 求二次型 x^TAx 在正交变换下的标准形也就是求二次型矩阵 A 的特征值. 由于

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & 1\\a & -5 & b\\1 & b & 1\end{bmatrix},$$

又 $[2,1,2]^T$ 是 A 的特征向量，有 $\begin{bmatrix}1 & a & 1\\a & -5 & b\\1 & b & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$，即

$$\begin{cases}2+a+2=2\lambda_1,\\2a-5+2b=\lambda_1,\\2+b+2=2\lambda_1,\end{cases}$$

解出 $a=b=2,\lambda_1=3$.

从秩 $r(A)=2$，知 $|A|=0$，于是 $\lambda_2=0$ 是 A 的特征值. 再由 $\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$，有 $1+(-5)+1=3+0+\lambda_3$，知 $\lambda_3=-6$ 是 A 的特征值.

学习札记：

因此，正交变换下二次型的标准形是 $3y_1^2-6y_3^2$.

【例 6.6】 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3,$$

(1) 写出二次型 f 的矩阵表达式；

(2) 用正交变换把二次型 f 化成标准形，并写出相应的正交矩阵.

【解】 (1) f 的矩阵表示为

$$f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&5&0\\-2&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

(2) 由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda-5&0\\2&0&\lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda-5&0\\0&2(\lambda-5)&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1&-5&2\\-1&\lambda-5&0\\0&0&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda^2-6\lambda),$$

得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0,5,6.

当 $\lambda=0$ 时，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\begin{bmatrix}-1&-1&2\\-1&-5&0\\2&0&-5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&5&0\\2&0&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$，

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_1=[5,-1,2]^{\mathrm{T}}$，即 $\lambda=0$ 的特征向量.

当 $\lambda=5$ 时，由 $(5\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}4&-1&2\\-1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_2=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$，即 $\lambda=5$ 的特征向量.

当 $\lambda=6$ 时，由 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}5&-1&2\\-1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

得基础解系 $\boldsymbol{\alpha}_3=[1,1,-2]^{\mathrm{T}}$，即 $\lambda=6$ 的特征向量.

对于实对称矩阵，对应于不同特征值的特征向量相互正交，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 相互正交，故只需单位化，令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},$$

学习札记：

$$P=[\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3]=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix},$$

则经正交变换 $x=Py$，二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax=y^{\mathrm{T}}\Lambda y=5y_2^2+6y_3^2.$$

【评注】 要掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，标准形中平方项的系数是二次型矩阵的特征值，所用的正交变换矩阵就是经过改造的二次型矩阵的特征向量. 具体解题步骤如下：

(1) 写出二次型矩阵 A；

(2) 求矩阵 A 的特征值；

(3) 求矩阵 A 的特征向量；

(4) 改造特征向量(单位化、Schmidt 正交化)$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$；

(5) 构造正交矩阵 $P=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n]$，

则经坐标变换 $x=Py$，得

$$x^{\mathrm{T}}Ax=y^{\mathrm{T}}\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

【注意】 特征值的顺序与正交矩阵 P 中对应的特征向量的顺序是一致的.

如果涉及到求参数的问题，其方法与特征值中所归纳的方法是一样的.

【例 6.7】 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^{\mathrm{T}}Ax=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$$

的规范形是 $y_1^2+y_2^2$，

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换；

(Ⅲ) 计算行列式 $|A+E|$ 的值.

【解】 (Ⅰ) 二次型 f 的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & -1\\ 1 & -1 & a\end{bmatrix},$$

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a-1 & 0 & \lambda-a-1\\ -1 & \lambda-a & 1\\ -1 & 1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

学习札记：

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-a & 2\\ -1 & 1 & \lambda-a+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-1)^2(\lambda-a+2),$$

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $a+1,a+1,a-2$.

因为二次型的规范形是 $y_1^2+y_2^2$，说明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $+,+,0$. 所以 $a=2$.

（Ⅱ）将 $a=2$ 代入矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中.

对 $\lambda=3$，由 $(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

对 $\lambda=0$，由 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

得特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

因为 $\lambda=3$ 时，特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交，故需 Schmidt 正交化. 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},$$

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 单位化，有

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

那么，经正交变换

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=3y_1^2+3y_2^2$.

（Ⅲ）因为 $\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 0\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\sim\begin{bmatrix}4 & & \\ & 4 & \\ & & 1\end{bmatrix}$，故 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=16$.

学习札记：

【例 6.8】 设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，且 $\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

（Ⅰ）求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的表达式；

（Ⅱ）若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}$ 的规范形是 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$，求 k.

【分析】 求二次型表达式就是求矩阵 $\boldsymbol{A}$，故应由特征值、特征向量开始.

【解】 （Ⅰ）设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是属于 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$. 那么由 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，有 $(\lambda^2-2\lambda)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda^2-2\lambda=0$，从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0 或 2.

又因 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，知 $r(\boldsymbol{A})=2$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=0$ 的特征向量. 因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,2,2.

设 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 关于 $\lambda=2$ 的特征向量，那么 $[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$ 与 $[0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 正交，得 $x_2+x_3=0$，解得 $\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[0,-1,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda=2$ 的特征向量. 于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)$，故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3)(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}\\&=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&-2\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\1&0&1\end{bmatrix}^{-1}\\&=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&-2\\0&0&2\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

所以二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=2x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3$.

（Ⅱ）因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,2,2，故 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值为 $k,k+2,k+2$.

由规范形为 $y_1^2+y_2^2-y_3^2$ 知 $\begin{cases}k<0,\\k+2>0,\end{cases}$ 即 $-2<k<0$.

【例 6.9】 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$$

为标准形，并写出所用坐标变换.

【解】

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3\\&=x_1^2+2x_1(x_2-2x_3)+(x_2-2x_3)^2+5x_2^2+5x_3^2-(x_2-2x_3)^2\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2^2+4x_2x_3+x_3^2\\&=(x_1+x_2-2x_3)^2+(2x_2+x_3)^2.\end{aligned}$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2-2x_3,\\y_2=\quad\ \ 2x_2+x_3,\\y_3=\qquad\quad\ \ x_3,\end{cases}$ 即

学习札记：

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{2}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

则有 $f = y_1^2 + y_2^2$.

【例 6.10】 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

为标准形，并写出所用坐标变换.

【解】 在 f 中不含平方项，由于含有 x_1x_2，故可先令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases}$$

作出平方项，然后再配方，即

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1x_2 + 4x_1x_3 \\ &= 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 4(y_1 + y_2)y_3 \\ &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3 \\ &= 2y_1^2 + 4y_1y_3 + 2y_3^2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2(y_2 - y_3)^2, \end{aligned}$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3, \\ z_2 = y_2 - y_3, \\ z_3 = y_3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3, \\ y_2 = z_2 + z_3, \\ y_3 = z_3, \end{cases}$ 即经坐标变换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2, \\ x_2 = z_1 - z_2 - 2z_3, \\ x_3 = z_3, \end{cases}$$

二次型化为标准形 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2$.

二次型的正定性

【例 6.11】下列矩阵中，正定矩阵是

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$.　(D) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.　[　]

【分析】 (A) 中 $a_{33} = -3 < 0$，(B) 中二阶顺序主子式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$，(C)

学习札记：

中行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$，故它们均不是正定矩阵. 所以应选(D).

或直接地，(D) 中三个顺序主子式 $\Delta_1=2,\Delta_2=6,\Delta_3=5$ 全大于 0，而知(D) 正定.

【例 6.12】 二次型 $x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定，则 t 的取值范围是_____.

【分析】 二次型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & t & -1\\ t & 4 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

的顺序主子式应全大于 0，即

$$\Delta_1=1>0,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2>0 \quad \Rightarrow t\in(-2,2),$$

$$\Delta_3=|\boldsymbol{A}|=-4t^2-4t+8>0 \quad \Rightarrow t\in(-2,1).$$

可见 $t\in(-2,1)$ 时，二次型正定.

【例 6.13】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，若 $k\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵，则 k _____.

【分析】 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 或 -2，那么 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值是 0 或 $-2k$，$k\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值是 1 或 $1-2k$. 又因为 $\boldsymbol{A}$ 是非零实对称矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 一定有非零特征值 -2，从而 $k\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 一定有特征值 $1-2k$.

又因正定的充分必要条件是特征值全大于 0，故 $k<\frac{1}{2}$.

【例 6.14】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是正定矩阵.

【证明】 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，那么

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1},$$

于是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是对称矩阵.

关于正定性的证明可以有多种思路：

(方法 1) 用特征值　设矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，知其特征值 $\frac{1}{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 全大于 0. 因此矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

(方法 2) 用与 $\boldsymbol{E}$ 合同　因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$，两边取逆，得到

$$(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}.$$

记 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{C}^{-1})^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{P}$ 可逆且 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{-1}$，于是

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

(方法 3) 用定义，坐标变换　因为 $\boldsymbol{A}$ 正定，那么 $\boldsymbol{A}$ 可逆，对二次型

学习札记：

$x^{\mathrm{T}}A^{-1}x$ 作坐标变换 $x = Ay$，有

$$x^{\mathrm{T}}A^{-1}x = (Ay)^{\mathrm{T}}A^{-1}(Ay) = y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y = y^{\mathrm{T}}Ay.$$

由于 A 可逆，那么 $\forall x \neq 0$，恒有 $y \neq 0$，又因 A 正定，那么有 $y^{\mathrm{T}}Ay > 0$，故 $\forall x \neq 0$，恒有 $x^{\mathrm{T}}A^{-1}x > 0$，所以 A^{-1} 正定.

（方法 4）用与已知的正定矩阵合同　因为 A 正定，那么 A 对称且可逆，于是

$$A^{\mathrm{T}}A^{-1}A = A,$$

所以 A^{-1} 与 A 合同，即二次型 $x^{\mathrm{T}}A^{-1}x$ 与 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 合同，故它们有相同的正、负惯性指数. 由 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型，知 $x^{\mathrm{T}}A^{-1}x$ 正定，即 A^{-1} 正定.

【例 6.15】　已知 A 与 $A-E$ 均是 n 阶正定矩阵，证明 $E-A^{-1}$ 是正定矩阵.

【证】　特征值法

(1) 由于 $(E-A^{-1})^{\mathrm{T}} = E^{\mathrm{T}} - (A^{-1})^{\mathrm{T}} = E - (A^{\mathrm{T}})^{-1} = E - A^{-1}$，知矩阵 $E-A^{-1}$ 是对称矩阵.

(2) 设 λ 是矩阵 A 的特征值，那么 $A-E$ 的特征值是 $\lambda-1$，$E-A^{-1}$ 的特征值是 $1-\dfrac{1}{\lambda}$.

由 A，$A-E$ 正定，知 $\lambda > 0$，$\lambda - 1 > 0$. 故 $E-A^{-1}$ 的特征值 $\dfrac{\lambda-1}{\lambda} > 0$. 所以矩阵 $E-A^{-1}$ 正定.

【例 6.16】　已知 A 是 3 阶对称矩阵，证明矩阵 A 正定的充分必要条件是存在可逆矩阵 C 使 $A = C^{\mathrm{T}}C$.

【证明】　必要性　如果 A 是正定矩阵，即二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型，那么存在坐标变换 $x = C_1 y$ 使

$$x^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}\Lambda y = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + d_3 y_3^2,$$

其中 $d_i > 0 (i = 1,2,3)$.

$$\text{再令}\begin{cases} z_1 = \sqrt{d_1}\,y_1, \\ z_2 = \sqrt{d_2}\,y_2, \\ z_3 = \sqrt{d_3}\,y_3, \end{cases}\text{即 } y = C_2 z, \text{其中 } C_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{d_1}} & & \\ & \dfrac{1}{\sqrt{d_2}} & \\ & & \dfrac{1}{\sqrt{d_3}} \end{bmatrix},$$

则有 $x^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}\Lambda y = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

由于 $C_1^{\mathrm{T}}AC_1 = \Lambda$，$C_2^{\mathrm{T}}\Lambda C_2 = E$，故

$$A = (C_1^{\mathrm{T}})^{-1}\Lambda C_1^{-1} = (C_1^{\mathrm{T}})^{-1}(C_2^{\mathrm{T}})^{-1}EC_2^{-1}C_1^{-1} = (C_2^{-1}C_1^{-1})^{\mathrm{T}}(C_2^{-1}C_1^{-1}).$$

记 $C = C_2^{-1}C_1^{-1}$，则 C 可逆，且 $A = C^{\mathrm{T}}C$.

充分性　如果 $A = C^{\mathrm{T}}C$，其中 C 可逆，那么

$$A^{\mathrm{T}} = (C^{\mathrm{T}}C)^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}C = A,$$

从而 A 是对称矩阵.

学习札记：

$\forall x \neq 0$，由于 C 可逆，知 $Cx \neq 0$，于是

$$x^{\mathrm{T}}Ax = x^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}Cx = (Cx)^{\mathrm{T}}(Cx) = \| Cx \|^2 > 0,$$

从而 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 是正定二次型，即 A 是正定矩阵.

【评注】 关于充分性也可如下证明：

因为 C 可逆，那么二次型 $x^{\mathrm{T}}Ax$ 经坐标变换 $x = C^{-1}y$，有

$$x^{\mathrm{T}}Ax = (C^{-1}y)^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}C)(C^{-1}y) = y^{\mathrm{T}}y = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2,$$

可见正惯性指数 $p = n$，故 A 是正定矩阵.

【例 6.17】 (1999,3) 设 A 为 $m \times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $B = \lambda E + A^{\mathrm{T}}A$，试证：当 $\lambda > 0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

【证法一】 定义法

(1) 因为 $B^{\mathrm{T}} = (\lambda E + A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = (\lambda E)^{\mathrm{T}} + (A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = \lambda E + A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = B$，所以 B 是 n 阶实对称矩阵.

(2) 构造二次型 $x^{\mathrm{T}}Bx$，有

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}}Bx &= x^{\mathrm{T}}(\lambda E + A^{\mathrm{T}}A)x \\ &= \lambda x^{\mathrm{T}}x + x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}Ax = \lambda x^{\mathrm{T}}x + (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax). \end{aligned}$$

因为 $\forall x \neq 0$，恒有 $x^{\mathrm{T}}x > 0$，$(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) \geqslant 0$，所以，当 $\lambda > 0$ 时，$\forall x \neq 0$，恒有

$$x^{\mathrm{T}}Bx = \lambda x^{\mathrm{T}}x + (Ax)^{\mathrm{T}}(Ax) > 0,$$

即二次型 $x^{\mathrm{T}}Bx$ 正定，故 B 是正定矩阵.

【证法二】 用特征值　B 的对称性略. 设 μ 是矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的任一特征值，α 是相应的特征向量，即 $A^{\mathrm{T}}A\alpha = \mu\alpha$，$\alpha \neq 0$，用 α^{T} 左乘上式的两端得，

$$(A\alpha)^{\mathrm{T}}(A\alpha) = \mu\alpha^{\mathrm{T}}\alpha.$$

由 $\alpha \neq 0$，必有 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha > 0$. 又 $(A\alpha)^{\mathrm{T}}(A\alpha) \geqslant 0$，故 $\mu \geqslant 0$.

因为 $B = \lambda E + A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值是 $\lambda + \mu$，可见当 $\lambda > 0$ 时，必有 $\lambda + \mu > 0$，即 B 的特征值全大于 0，所以 B 是正定矩阵.

【评注】 要会用定义法，要熟悉内积 $x^{\mathrm{T}}x$，$(Ax)^{\mathrm{T}}(Ax)$. 本题是当年数学三考的最不好的一个题，得零分者居然高达 62%.

【例 6.18】 设 A 是 n 阶正定矩阵，B 是 n 阶反对称矩阵，证明矩阵 $A - B^2$ 可逆.

【证】 由 A 是正定矩阵知 $A^{\mathrm{T}} = A$，由 B 是反对称矩阵知 $B^{\mathrm{T}} = -B$，于是

$$\begin{aligned} (A - B^2)^{\mathrm{T}} &= (A + B^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + (B^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}} \\ &= A + B^{\mathrm{T}}B = A - B^2, \end{aligned}$$

即 $A - B^2$ 是对称矩阵.

构造二次型 $x^{\mathrm{T}}(A - B^2)x$，有

$$x^{\mathrm{T}}(A - B^2)x = x^{\mathrm{T}}(A + B^{\mathrm{T}}B)x = x^{\mathrm{T}}Ax + (Bx)^{\mathrm{T}}(Bx).$$

学习札记：

因 $\forall x \neq 0$，恒有 $x^{\mathrm{T}}Ax > 0$，$(Bx)^{\mathrm{T}}(Bx) \geqslant 0$，即 $\forall x \neq 0$，恒有 $x^{\mathrm{T}}(A-B^2)x > 0$，所以 $x^{\mathrm{T}}(A-B^2)x$ 是正定二次型. 因此 $A-B^2$ 的各阶顺序主子式均大于零，特别地有 $|A-B^2| > 0$，从而矩阵 $A-B^2$ 可逆.

【例 6.19】 已知 A 是 n 阶正定矩阵，n 维非零列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足 $\alpha_i^{\mathrm{T}}A\alpha_j = 0(i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,s)$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

【证】 设
$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0, \tag{1}$$
用 $\alpha_1^{\mathrm{T}}A$ 左乘(1)式，有
$$k_1\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_1 + k_2\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_s = 0, \tag{2}$$
将 $\alpha_i^{\mathrm{T}}A\alpha_j = 0(i \neq j)$ 代入(2)式得
$$k_1\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_1 = 0. \tag{3}$$
因为 A 正定，$\alpha_1 \neq 0$，故 $\alpha_1^{\mathrm{T}}A\alpha_1 > 0$，从而 $k_1 = 0$.

同理可证 $k_2 = 0,\cdots,k_s = 0$. 因此向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

矩阵的等价、相似、合同

1. A 与 B 等价 $\Leftrightarrow A$ 经过初等变换得到 B

$\Leftrightarrow PAQ = B$，其中 P,Q 可逆

$\Leftrightarrow r(A) = r(B)$，$A$ 与 B 同型矩阵.

2. A 与 B 相似 $\Leftrightarrow P^{-1}AP = B$.

(1) $A \sim \Lambda, B \sim \Lambda \Rightarrow A \sim B$.

(2) 不相似

①$\lambda_A \neq \lambda_B$ 或 $r(A) \neq r(B)$ 或 $|A| \neq |B|$ 或 $\sum a_{ii} \neq \sum b_{ii}$.

②$A \sim \Lambda$ 但 B 不能相似对角化.

(3) 对于实对称矩阵 A,B，

$$A \sim B \Leftrightarrow \lambda_A = \lambda_B.$$

3. A 与 B 合同 $\Leftrightarrow C^{\mathrm{T}}AC = B$，其中 C 可逆

$\Leftrightarrow x^{\mathrm{T}}Ax$ 与 $x^{\mathrm{T}}Bx$ 有相同的正、负惯性指数.

【例 6.20】 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 等价、合同但不相似.

【解】 因为秩 $r(A) = r(B)$，所以 A 与 B 等价.

因为 A 与 B 特征值不相同，所以 A,B 不相似.

因为 $x^{\mathrm{T}}Ax = x_1^2 + 2x_2^2$ 与 $x^{\mathrm{T}}Bx = x_1^2 + 4x_2^2$ 有相同的正、负惯性指数，所以 A 与 B 合同. 或直接地由

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 4 \end{bmatrix},$$

知 A 与 B 合同.

学习札记：

【例 6.21】 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & \\ & 2\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1 & \\ & -4\end{bmatrix}$ 不合同.

【解】 这是因为如果 A 和 B 合同，则有可逆矩阵 C 使 $C^{T}AC=B$，从而

$$|B|=|C^{T}AC|=|C|^{2}|A|>0,$$

而 $|B|<0$，矛盾，故 A 和 B 不合同.

当然，更可以直接由 $x^{T}Ax$ 和 $x^{T}Bx$ 的正、负惯性指数不一样来说 A 与 B 不合同.

【例 6.22】 判断

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

是否等价、相似、合同.

【解】 因为秩 $r(A)=1,r(B)=1$，所以 A 与 B 等价.

由 $|\lambda E-A|=\lambda^{3}-3\lambda^{2}$，知矩阵 A 的特征值是 3,0,0. 又因 A 是实对称矩阵，所以 A 必能相似对角化，且

$$A\sim\begin{bmatrix}3 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix},$$

即 A 与 B 相似.

实对称矩阵 $A\sim B\Rightarrow A$ 与 B 有相同的特征值

$\Rightarrow x^{T}Ax$ 与 $x^{T}Bx$ 有相同的正、负惯性指数

$\Rightarrow A$ 与 B 合同.

所以本题 A 与 B 相似、合同、等价均成立.

【评注】 实对称矩阵 A 与 B 相似 $\Rightarrow A$ 与 B 合同，但 A 与 B 合同 $\not\Rightarrow A$ 与 B 相似.

【例 6.23】 设 A 是 3 阶实对称矩阵，将矩阵 A 的 1,2 两行互换后再 1、2 两列互换得到的矩阵是 B，试判断 A 与 B 是否等价、相似、合同？

【解】 矩阵 A 经初等变换得到矩阵 B，故 A 与 B 必等价.

用初等矩阵表示，有

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=B.$$

因为 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$

所以，A 与 B 既相似也合同.

练习　(1) 举 2 阶矩阵的例子，它们有相同的特征值但是不相似.

(2)(2013) 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 相似的充分必要条件是

(A) $a=0,b=2$.　　(B) $a=0,b$ 任意常数.

(C) $a=2,b=0$.　　(D) $a=2,b$ 任意常数.

学习札记：

学习札记：

四、练习题精选

1. 填空题

(1) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩 $r(f)=$ _____.

(2) 二次型 $f=x_1^2-x_2x_3$ 的规范形是_____.

(3) 二次型 $5x_1^2+x_2^2+tx_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 正定，则 t _____.

(4) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵，则 k _____.

2. 选择题

(1) 与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&2\\0&2&2\end{bmatrix}$ 合同的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}-1&&\\&-1&\\&&-1\end{bmatrix}$.　　[　　]

(2) 对于 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，下述结论中正确的是

(A) 化 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形的坐标变换是唯一的.

(B) 化 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为规范形的坐标变换是唯一的.

(C) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的标准形是唯一的.

(D) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形是唯一的.　　[　　]

(3) n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充分必要条件是

(A) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$.

(B) 负惯性指数为零.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵合同.

(D) 存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$.　　[　　]

3. 解答题

(1) 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3-4x_2x_3$$

的秩为 2，求 c，并用正交变换把 f 化成标准形，写出相应的正交矩阵.

(2) 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，证明 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是正定矩阵.

(3) 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$$

在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

学习札记：

答案与提示

1. (1) 2.　　(2) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　　(3) $t>2$.　　(4) $k>0$.

【提示】 (1) 二次型的秩也就是二次型矩阵的秩.

(2) 求二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，可知正、负惯性指数，即可知规范形.

或用配方法，令 $\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_2+y_3,\\x_3=y_2-y_3,\end{cases}$ 将二次型化成规范形.

(3) 用顺序主子式.

(4) 用特征值.

2. (1) (B).　　(2) (D).　　(3) (C).

【提示】 (1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值来看正、负惯性指数，用配方法也可.

(2) 化二次型为标准形即可用正交变换法也可用配方法，所用坐标变换不同，标准形也可以不同，故(A)、(C) 均不正确.

化二次型为规范形一般用配方法，或者先正交变换法化为标准形后再用配方法化为规范形，方法不同所用坐标变换也就可不同，故(B) 不正确.

规范形实际上由二次型的正、负惯性指数所确定，而正负惯性指数在坐标变换下是不变的(惯性定理 6.4)，故仅(D) 正确.

(3) (A) 是充分条件，并不必要. 因为 $\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵，那么

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E},$$

表明 $\boldsymbol{A}$ 的特征值全是 1，所以 $\boldsymbol{A}$ 正定. 但 $\boldsymbol{A}$ 正定时特征值可以不全是 1.

(B) 是必要条件，并不充分，因为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定的充要条件是 $p=n$. 显然有 $q=0$，但 $q=0$ 不能保证必有 $p=n$. 例如

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2,$$

$p=2,q=0$，并不是 3 元正定二次型.

(D) 中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是否可逆不明确，若 $\boldsymbol{C}$ 不可逆，则

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{C}|^2=0,$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不可能正定.

关于(C) 的直接证明：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 合同，即对二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 存在坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，使

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{y}=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2.$$

$\forall\,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，由 $\boldsymbol{C}$ 可逆及 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$，知 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，因此恒有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}>0$，即二次

学习札记：

型 $x^{T}Ax$ 正定.

反过来，若经坐标变换 $x = Cy$ 化二次型为标准形

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2,$$

如果 $d_n \leqslant 0$，那么取 $y_0 = [0,0,\cdots,0,1]^{T}$，有 $x_0 = Cy_0 \neq 0$，而

$$x_0^{T}Ax_0 = d_n \leqslant 0,$$

与 $x^{T}Ax$ 正定相矛盾，故必有 $d_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$. 于是再经坐标变换

$$z_1 = \sqrt{d_1}y_1, z_2 = \sqrt{d_2}y_2, \cdots, z_n = \sqrt{d_n}y_n,$$

有 $f = x^{T}Ax = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$.

3. (1) $c = 2$.

令 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$，经 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$，

有 $x^{T}Ax = y^{T}By = 6y_1^2 + 6y_2^2$.

(2) 由 A 正定知 A 是可逆的对称矩阵，又 $A^{*} = |A|A^{-1}$，故

$$(A^{*})^{T} = (|A|A^{-1})^{T} = |A|(A^{-1})^{T} = |A|(A^{T})^{-1}$$
$$= |A|A^{-1} = A^{*},$$

即 A^{*} 是对称矩阵.

若 λ 是矩阵 A 的特征值，则由 A 正定知 $\lambda > 0$，且 $|A| > 0$，故 A^{*} 的特征值 $\frac{|A|}{\lambda} > 0$.

(3) $a = 2, Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

标准形是 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ 说明 A 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, 0$.

学习札记：

附录　45 分钟水平测试

自测(一)

1. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=[4,-1,3,-2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[8,-2,a,-4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[3,-1,4,-2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=[a,-2,8,-4]^{\mathrm{T}}$ 的秩为 2，则 $a=$ ____.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 是 4 阶单位矩阵，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^5)^{-1}=$ ____.

3. 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 的特征值是

(A)1,1,2.　(B)-1,1,2.　(C)0,1,3.　(D)1,2,2.

[　]

4. $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\c_1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\c_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\c_3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\c_4\end{bmatrix}$，$\forall c_i(i=1,2,3,4)$ 总有

(A)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.　(B)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

(C)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.　(D)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

[　]

5. 已知 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\b\end{bmatrix}$ 线性表出，求 a,b 的值，并当 $\boldsymbol{\beta}$ 表示法不唯一时写出 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式.

6. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1\\a&-1&2\\3&0&0\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 a 的值，并求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

学习札记：

自测(二)

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 4 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,-8,10]^{\mathrm{T}}$，$2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=[2,0,-24,29]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,-3,4]^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是_____.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{BA}-2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{B}=$_____.

3. 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$.

如果秩 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})$，则必有

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.　　(B) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 线性相关.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.　　(D) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1}$ 线性无关.

[　　]

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，特征值是 0,1,2，若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3-3\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{E}$，则与 $\boldsymbol{B}$ 相似的矩阵是

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&3&\\&&-1\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}2&&\\&0&\\&&-2\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}2&&\\&2&\\&&6\end{bmatrix}$.　　[　　]

5. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-4&5&1\\4&0&a\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&&\\&5&\\&&b\end{bmatrix}$ 相似，求 a,b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

6. 已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3,$$

(1) 求正交变换化二次型为标准形；

(2) 判断此二次型是否正定.

学习札记：

参考答案与提示

(一)

1. $a=6$.

如若求极大线性无关组应如何处理?若向量组的秩是 3 情况又如何?

2. $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^5)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$.

【注意】 $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{O}$.

由 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ 直接求逆.

或者利用 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^4+\boldsymbol{A}^5)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^6=\boldsymbol{E}$,按定义法处理.

3. (A).

利用 $\sum a_{ii}=\sum\lambda_i$ 可排除(B)与(D). 利用 $|\boldsymbol{A}|=\prod\lambda_i$ 及 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 得到 $\lambda=0$ 不是特征值,从而排除(C),或计算 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 是否等于 0 来判断 2 是不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

4. (C).

因为 $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}\neq 0$,知 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ 线性无关,那么其延伸组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性无关.

5. $a=1,b=3,\boldsymbol{\beta}=t\boldsymbol{\alpha}_1+(1-t)\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, t 为任意常数.

6. $a=6,\boldsymbol{A}^{10}=\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}3^{11}+1&0&3^{10}-1\\2\cdot 3^{11}-6&4&2\cdot 3^{10}-2\\3^{11}-3&0&3^{10}+3\end{bmatrix}$.

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$ 知 $\lambda=-1$ 必有两个线性无关的特征向量,故秩 $r(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$,得 $a=6$.

$\lambda=3$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=[1,2,1]^{\mathrm{T}}$.

$\lambda=-1$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[1,0,-3]^{\mathrm{T}}$.

$$\boldsymbol{A}^{10}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{10}\boldsymbol{P}^{-1},\boldsymbol{P}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3].$$

学习札记：

（二）

1. $[2,0,-24,29]^{\mathrm{T}}+k_1[1,1,-5,6]^{\mathrm{T}}+k_2[2,-1,-40,48]^{\mathrm{T}}$.

【注意】 $2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，

$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，

$2(2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1)$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

2. $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&4\\2&0&2\\2&2&4\end{bmatrix}$.

由 $|\boldsymbol{A}|=2,\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，用 $\boldsymbol{A}$ 左乘矩阵方程两端，化简为

$$B(A-2\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}.$$

3. (A).

$$\begin{aligned}r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)&\leqslant r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})\\&=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{s-1})\leqslant s-1<s.\end{aligned}$$

4. (B).

$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $0,1,2\Rightarrow\boldsymbol{A}^2$ 的特征值 $0,1,4\Rightarrow\boldsymbol{A}^3$ 的特征值 $0,1,8\Rightarrow\boldsymbol{B}$ 的特征值.

5. $a=4,b=5,\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\-1&4&0\end{bmatrix}$.

由 $\sum a_{ii}=\sum b_{ii}$ 与 $|\boldsymbol{A}|=0$ 联立可求 a,b.

$\boldsymbol{P}$ 应按特征值是 0,5,5 的顺序排列特征向量.

6. (1) $f=11y_1^2,\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{11}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{3}{\sqrt{22}}\\-\frac{1}{\sqrt{11}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{22}}\\\frac{3}{\sqrt{11}}&0&\frac{2}{\sqrt{22}}\end{bmatrix}$.

(2) f 不是正定二次型.

先写出二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$，再求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量，不要忘记 Schmidt 正交化.

因为特征值不是全大于 0，即正惯性指数小于 n，所以 f 不是正定二次型.